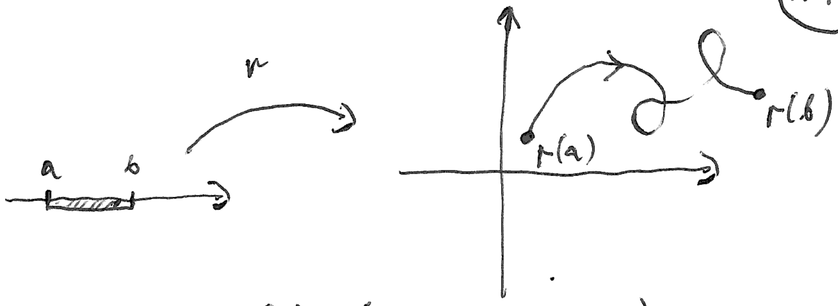
Łuki w $\mathbb{R}^n$

$r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

↑

łuk w $\mathbb{R}^n$



$$r(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t)),\quad t\in[a,b] \qquad x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$$

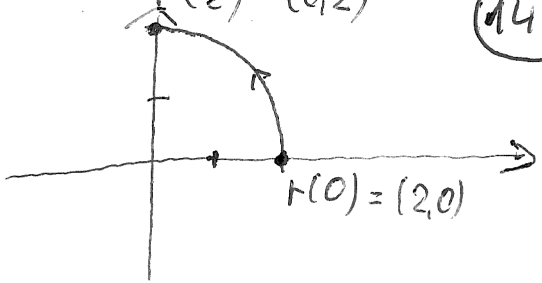
Utożsamiamy funkcję r z obrazem $[a,b]$: $\quad r = \{x(t) : t\in[a,b]\}$

Długość łuku $\quad |r| = \int_{[a,b]} \sqrt{x_1'(t)^2+\dots+x_n'(t)^2}\,dt = \int_{[a,b]} \|x'(t)\|\,dt$

Całka krzywoliniowa nieorientowana:

$$\int_r f(x)\,dL = \int_{[a,b]} f(x(t))\underbrace{\|x'(t)\|}_{=\sqrt{x_1'(t)^2+\dots+x_n'(t)^2}}\,dt$$

Zad 68.



$$\int_r x^2 y \, dl = ?$$

a) $r(t) = (x(t), y(t))$, $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

b) $r(t) = (x(t), y(t))$, $x(t) = 2\cos t^2$, $y(t) = 2\sin t^2$, $t \in [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$

a) $$\int_r x^2 y \, dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(t) y(t) \, \|r'(t)\| \, dt = (*)$$

$r'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$, $\|r'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 2$

$$(*) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t \cdot 2\sin t \cdot 2 \, dt = -16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, (-\sin t) \, dt = -16 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{16}{3}$$

b) $r(t) = (2\cos t^2, 2\sin t^2)$ $\quad t \in [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ (146)

$r'(t) = (-4t \sin t^2, 4t\cos t^2)$

$\|r'(t)\| = \sqrt{16t^2\sin^2 t^2 + 16t^2\cos^2 t^2} = \sqrt{16t^2}\sqrt{\sin^2 t^2 + \cos^2 t^2} = 4|t|$

$$\int_r x^2 y\, dl = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cancel{16t^2 \sin^2 t^2} \, 4\cos^2 t^2 \cdot 2\sin t^2 \cdot 4|t|\, dt =$$

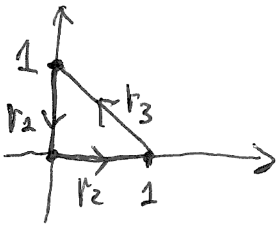
$$= 16 \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos^2 t^2 \sin t^2 \, 2t\, dt = \left\{ \begin{array}{l} s = t^2 \\ s(0) = 0 \\ s(\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s \cdot \sin s\, ds$$

$ds = 2t\,dt$

$$= -16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s\,(-\sin s)\, ds = -16 \left[\frac{\cos^3 s}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}$$

Zad 69.

1. $\int_{\Gamma} (x+y)\,dl$ Γ - brzeg trójkąta o wierzchołkach $(1,0), (0,1), (0,0)$



$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

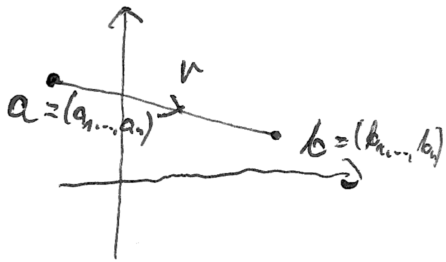
$$\Gamma_1(t) = (0, 1-t) \qquad t \in [0,1]$$

$$\Gamma_2(t) = (t, 0) \qquad t \in [0,1]$$

$$\Gamma_3(t) = (1-t, t) \qquad t \in [0,1]$$

Ogólnie: jeśli Γ - odcinek o początku a i końcu b, to

$$\underbrace{\Gamma(t) = (1-t)a + tb \quad \text{dla } t \in [0,1]}_{\text{parametryzacja odcinka } [a,b]}$$

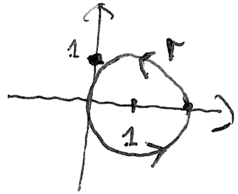


$\Gamma_1(t) = (0, 1-t)$, $\Gamma_2(t) = (t, 0)$, $\Gamma_3(t) = (1-t, t)$

$$\int_\Gamma (x+y)\,dl = \int_{\Gamma_1} (x+y)\,dl + \int_{\Gamma_2} (x+y)\,dl + \int_{\Gamma_3} (x+y)\,dl =$$

$$= \int_0^1 (0+1-t)\,\|(0,-1)\|\,dt + \int_0^1 (t+0)\,\|(1,0)\|\,dt + \int_0^1 (1-t+t)\,\|(-1,1)\|\,dt$$

$$= \int_0^1 1-t\,dt + \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 1\cdot\sqrt{2}\,dt = \int_0^1 1+\sqrt{2}\,dt = 1+\sqrt{2}$$



2. $\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,dl$ $\quad \Gamma$ - okrąg $x^2+y^2 = 2x$

$x^2+y^2 = 2x \iff (x-1)^2 + y^2 = 1^2$ $\quad x(t) = 1+\cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

Ogólnie:

Parametryzacja okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$: $\quad x(t) = a + r\cos t$
$\quad y(t) = b + r\sin t$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

149

$r(t) = (x(t), y(t)) = (1+\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$

$r'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \|r'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$

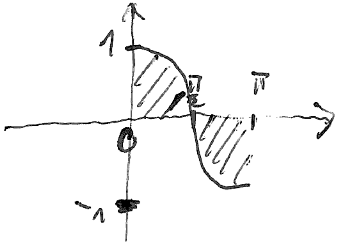
$$\cancel{\int_r \sqrt{(1+\cos t)^2 + \sin^2 t}\, \|r'(t)\| dt} =$$

$$\int_r \sqrt{x^2+y^2}\, dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos t)^2 + \sin^2 t}\, \|r'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\left(\cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}\right)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}\, dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{t}{2}\right| dt = 4\int_0^{\pi} \left|\cos\frac{t}{2}\right| dt = 4\int_0^{\pi} \cos\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 4\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 4\left(2\sin\frac{\pi}{2} - 2\sin 0\right) = 8$$



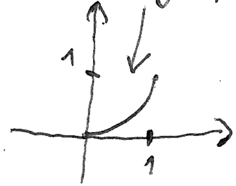
Całka krzywoliniowa zorientowana

Pole wektorowe na obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^2$: $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, $(x,y) \in D$

$\Gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in [a,b]\}$ - łuk gładki

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_a^b P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt$$

fragment paraboli $y=x^2$



Zad 70.

$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (2x+y,\ x^2-y)$, $\quad \Gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$

$\Gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, 2t)$

$$\int_\Gamma (2x+y)\,dx + (x^2-y)\,dy = \int_0^1 (2t+t^2)1 + (t^2-t^2)2t\,dt = \int_0^1 2t+t^2\,dt = \left[t^2+\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

<u>Def</u> Pole wektorowe $\vec{F} = (P, Q)$ określone na $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nazywamy potencjalnym, gdy istnieje funkcja $U : D \to \mathbb{R}$ taka, że $\vec{F} = \operatorname{grad} U \iff P = \frac{\partial U}{\partial x}, \ Q = \frac{\partial U}{\partial y}$

U - potencjał pola wektorowego $\vec{F}$

<u>Tw</u> Jeżeli $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jednospójny, to
pole wektorowe $\vec{F} = (P, Q)$ jest potencjalne $\iff \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

<u>Tw</u> Jeżeli pole wektorowe $\vec{F} = (P, Q)$ ma potencjał U, to

$$\int_{\Gamma_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1),$$

gdzie Γ_{AB} - łuk o początku $A = (x_1, y_1)$ i końcu $B = (x_2, y_2)$

Zad 71

Oblicz $\int\limits_{\Gamma_{AB}} (3y+4x)\,dx + (3x+1)\,dy$ $\quad A=(1,2)$, $B=(4,0)$

Schemat postępowania: $\int\limits_{\Gamma_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = ?$

1. Sprawdzamy, czy pole wektorowe $\vec{F}=(P,Q)$ jest potencjalne, tzn czy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ?$$

2. Jeśli TAK, to znajdujemy potencjał U pola wektorowego F, tzn U spełniającą

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \end{cases}$$

Jak rozwiązać układ $(*)$?

I sposób

Z obydwu równań z (*) dostajemy:

(*) $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) \end{cases}$

$$\begin{cases} U(x,y) = \int_0^x P(x,y)\,dx + \psi(y) \\ U(x,y) = \int_0^y Q(x,y)\,dy + \varphi(x) \end{cases}$$

z niewiadomymi funkcjami $\psi(y)$ i $\varphi(x)$

Porównując prawe strony powyższego układu znajdujemy funkcje $\psi(y)$ i $\varphi(x)$ i dostajemy rozwiązanie $U(x,y)$

II sposób

Z 1. równania w (*) wyliczamy $U(x,y) = \int_0^x P(x,y)\,dx + \psi(y)$

Podstawiając do 2. równanie w (*) za $U(x,y)$ prawą stronę dostajemy

$$\int_0^x \frac{\partial}{\partial y} P(x,y)\,dx + \psi'(y) = Q(x,y)$$ i wyliczamy $\psi(y)$

3. Mając $U(x,y)$ otrzymujemy $\int_{\Gamma AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = U(B) - U(A)$

Zad 71

$$\int_{\Gamma AB} (3y+4x)dx + (3x+1)dy = ? \qquad A=(1,2), \quad B=(4,0)$$

$P(x,y) = 3y+4x$, $Q(x,y) = 3x+1$

1° Czy $F=(P,Q)$ pole potencjalne?

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow F=(P,Q) \text{ jest polem potencjalnym}$$

2° Wyliczamy potencjał U

I sposób

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 3y+4x \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 3x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(x,y) = 3yx + 2x^2 + \psi(y) \\ U(x,y) = 3yx + y + \varphi(x) \end{cases}$$

Porównując prawe strony dostajemy: $\varphi(x) = 2x^2$, $\psi(y) = y$.

Zatem $U(x,y) = 3yx + 2x^2 + y$

II sposób

$\frac{\partial U}{\partial x} = 3y + 4x \Rightarrow U(x,y) = 3yx + 2x^2 + \psi(y)$. Podstawiając do $\frac{\partial U}{\partial y} = 3x + 1$:

$3x + \psi'(y) = 3x + 1 \Rightarrow \psi'(y) = 1 \Rightarrow \psi(y) = y$ (bierzemy dowolne rozwiązanie $\psi'(y) = 1$, najlepiej najprostsze)

$$U(x,y) = 3yx + 2x^2 + y$$

3° Wyliczamy całkę krzywoliniową zorientowaną:

$$\int_{\Gamma_{AB}} (3y + 4x)dx + (3x+1)dy = U(4,0) - U(1,2) = 32 - 6 - 2 - 2 = 22$$

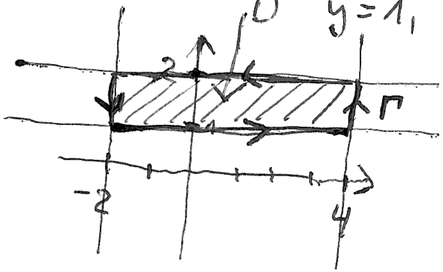
Twierdzenie Greena

$D \subset \mathbb{R}^2$ obszar domknięty, to

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Zad 72

1) $\oint_\Gamma 3xy\,dx + 2xy\,dy$ $\quad \Gamma$ – brzeg obszaru D ograniczonego krzywymi $x=-2$, $x=4$, $y=1$, $y=2$



$P(x,y) = 3xy$

$Q(x,y) = 2xy$

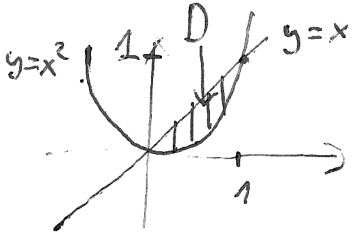
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 3x$$

Z tw Greena

$$\oint_\Gamma 3xy\,dx + 2xy\,dy = \iint_D (2y-3x)\,dx\,dy = \int_{-2}^{4}\left(\int_1^2 (2y-3x)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-2}^{4} \left[y^2 - 3xy\right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_{-2}^{4} (4 - 6x - 1 + 3x)\,dx = 3\int_{-2}^{4} (1-x)\,dx = 3\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{4} =$$

$$= 3(4 - 8 + 2 + 2) = 0$$



2) $\oint_\Gamma \underbrace{(e^x + y^2)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(e^y + x^2)}_{Q(x,y)}dy$, $\Gamma = \partial D$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$

z tw. Greena

$$\oint_\Gamma (e^x + y^2)dx + (e^x + x^2)dy = \iint_D (\underbrace{2x}_{\frac{\partial Q}{\partial x}} - \underbrace{2y}_{\frac{\partial P}{\partial y}})\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (2x - 2y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy - y^2\right]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 2x^2 - x^2 - 2x^3 + x^4\,dx = \int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{10}{30} - \frac{15}{30} + \frac{6}{30} = \frac{1}{30}$$