Zad 2

1. $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{n^2}{n^2+3}, \left(1+\frac{3}{n}\right)^n, \cos n\pi\right)$

$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3}, \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n, \lim_{n\to\infty} \cos n\pi\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\to 0}} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$ (bo $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$)

$\lim_{n\to\infty} \cos n\pi = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$ – ta granica nie istnieje, bo $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = 1$ i $\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} = -1$

bo $\cos n\pi = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ -1 & n = 2k+1 \end{cases}$

Odp: Ponieważ granica $\lim_{n\to\infty} \cos n\pi$ nie istnieje, to nie istnieje również granica $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n)$

2. $(x_n, y_n, z_n) = \left(5 + \left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{n+5}{n^2+1}, \sqrt[n]{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty} 5 + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0} = 5$, (bo $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$)

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{n}} + \overset{\to 0}{\frac{5}{n^2}}}{1 + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(bo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$ dla dowolnego niezerowego wielomianu $P(n)$)

Odp: Granica ciągu istnieje i wyraża się wzorem

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n, z_n) = \left(\lim_{n\to\infty} 5 + \left(\frac{2}{3}\right)^n, \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n^2+1}, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) = (5, 0, 1)$$

Zad 3

1. $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-0}{x+0}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0-y}{0+y}\right) = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

Ponieważ granice iterowane są różne, to sugeruje, że nie istnieje granica podwójna.

6

Jak pokazać, że ~~nieistniej~~ nie istnieje granica podwójna $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$?

Należy skorzystać z faktu, że jeśli istnieją ciągi $(x_n,y_n)\to(0,0)$ i $(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)\to(0,0)$ ~~takie~~ dla których $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)$, to ~~f~~ granica podwójna $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ nie istnieje

Możemy wziąć (podobnie jak przy granicach iterowanych) $(x_n,y_n)=(\frac{1}{n},0)$ i $(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)=(0,\frac{1}{n})$

Wówczas: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}+0} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

$$\lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{0-\frac{1}{n}}{0+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$$

Odp:

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)$, to $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ nie istnieje.

2. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{0+(x-0)^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+(0-y)^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Co z $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$? $\xrightarrow{\text{Idea:}}$ Patrzymy co szybciej zbiega do zera - licznik, czy mianownik

x^2y^2 ~~(4)~~ - do czwartej potęgi (szybciej zbiega do zera)

$x^2y^2 + (x-y)^2$ - do drugiej potęgi (wolniej zbiega do zera),

ale jeśli $x = y$, to tak samo zbiega jak licznik

Niech $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ i $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^2} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+4n^2} = 0$$

Odp: Ponieważ te granice są różne, to nie istnieje granica podwójna.

3. $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\left(\lim\limits_{y\to 0}\sin\overset{\pm\infty}{\frac{1}{y}}\right)\right)$ – nie istnieje

ta granica nie istnieje !

podobnie

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(y\sin\frac{1}{y}\left(\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\right)\right)$ – nie istnieje

Pokażemy, że mimo braku granic iterowanych, to granica podwójna istnieje.

Jak pokazać, że $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$? Algorytm postępowania:

a) szacujemy $|f(x,y)|$ z góry przez jakąś funkcję $g(x,y)$ (np. zmniejszając mianownik lub zwiększając licznik), o której wiemy, że $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} g(x,y) = 0$. ~~Jeśli~~

b) ~~$|f(x,y)|$~~ Jeśli $|f(x,y)| \leq g(x,y) \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\longrightarrow} 0$, to również $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

W naszym przypadku

$$\Big|(x+y)\underbrace{\overbrace{\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}}^{\leq 1}}_{\text{moduł tego jest ograniczony}}\Big| \leq |x+y| \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\longrightarrow} 0.$$

Zatem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$

Zad 4

nie można od razu, bo wtedy $\frac{\infty}{\infty}$

1. $$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{xy} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \Big(\underbrace{\frac{1}{y}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\Big) = 0$$

2. $$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to a}} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \underbrace{y}_{\to a} = a$$

$\to 1$ bo $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (u nas $t = xy$)

Zad 5

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2y^2+x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f ciągła poza $(0,0)$ jako funkcja wymierna. Co z ciągłością w $(0,0)$?

f ciągła w $(0,0)$ $\iff$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0) = 0$

Zatem aby była ciągła wystarczy pokazać, że $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

Szacując dostajemy

zmniejszamy mianownik

$$\left|\frac{x^2y}{x^2y^2+x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2y}{x^2}\right| = |y| \to 0 \text{ przy } \substack{x\to 0\\ y\to 0}$$

To oznacza, że $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2y^2+x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$, czyli f jest ciągła też w $(0,0)$

Odp: f jest ciągła na $\mathbb{R}^2$

Zad 6 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Niech $v \in \mathbb{R}^2$, ~~$v \neq (0,0)$~~. Pokażemy, że $\frac{df}{dv}(0,0)$ istnieje

$v = (v_1, v_2)$. Niech najpierw $v_1 \neq 0$

$$\frac{df}{dv}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tv_1 t^3 v_2^3}{t(t^2v_1^2 + t^6 v_2^6)} = \lim_{t\to 0} \frac{tv_1 v_2^3}{v_1^2 + t^4 v_2^6} = 0$$

Jeśli $v_1 = 0$ i t_0

$$\frac{df}{dv}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

Zatem $\forall v \in \mathbb{R}^2$ $\frac{df}{dv}(0,0)$ istnieje i jest równe zeru.

Ale f nie jest ciągła w $(0,0)$. Niech $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right)$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^6}} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$ Czyli nieprawda, że $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$

Zad 7

$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ dla $x \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ?$ Różniczkujemy po x funkcję $x \mapsto f(x,y)$, gdzie y - stały parametr

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ?$ —"— y —"— $y \mapsto f(x,y)$, —"— x - —"—

bo $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

pochodna zewnętrzna   pochodna wewnętrzna

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Zad 8

$$f(x,y) = xy^2 + 2x \quad , \quad v = (1,2) \quad , \quad \frac{df}{dv}(x,y) = ?$$

Korzystamy z faktu, że $\frac{df}{dv}(x,y) = Df(x,y)v$

W naszym przypadku $Df(x,y) = \text{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$,

czyli

$$\frac{df}{dv}(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \cdot (v_1, v_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

$$\frac{df}{dv}(x,y) = (y^2+2, 2xy) \cdot (1,2) = y^2 + 2 + 4xy$$