Zad 9 (14)

$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Kiedy f różniczkowalna i znaleźć $Df(x)$?

Niech $x \neq 0$ $(= (0, \ldots, 0))$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n$$

Ponieważ pochodne cząstkowe są ciągłe dla $x \neq (0, \ldots, 0)$, to f jest różniczkowalna na tym zbiorze i $Df(x) = \operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|}\right) = \frac{x}{\|x\|}$

Co dla $x = (0, \ldots, 0)$?

Czy istnieją pochodne cząstkowe?

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \ldots, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, \ldots, \overset{i}{t}, \ldots, 0) - f(0, \ldots, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

Zatem nie istnieją w $(0,0)$ pochodne cząstkowe, czyli f nie jest też wtedy różniczkowalna

Zad 10 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

f ciągła w $(0,0)$, bo $f(0,0)=0$ i $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{|xy|} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Czy f jest różniczkowalna w $(0,0)$?

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-A(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \overset{?}{=} 0, \text{ gdzie } A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)$$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \overset{?}{=} 0$$

Ale $\sqrt{|h_1h_2|}$ tego samego rzędu co $\sqrt{h_1^2+h_2^2}$, więc ta granica nie jest równa zero dla każdego ciągu $(h_{1n}, h_{2n}) \to (0,0)$

Niech np $h_{1n} = \frac{1}{n}$, $h_{2n} = \frac{1}{n}$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{|h_{1n}h_{2n}|}}{\sqrt{h_{1n}^2+h_{2n}^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$

Zatem f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

Zad 11

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ciągłość w (0,0)

Czy f ciągła w (0,0)? Tzn. czy $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$?

Intuicja xy rzędu 2, a $\sqrt{x^2+y^2}$ rzędu 1, czyli w granicy powinno być zero

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2}}\right| = |y| \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{} 0,$$ to oznacza, że $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$; f ciągła w (0,0)

Różniczkowalność w (0,0)

Schemat postępowania

a) Liczymy z definicji pochodne cząstkowe: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$

b) Jeśli pochodne cząstkowe nie istnieją, to f nie jest różniczkowalna w (0,0). Jeśli istnieją, to przyjmujemy $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$

c) Sprawdzamy, czy $\lim\limits_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-A(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$? TAK – f różniczkowalna w (0,0)
NIE – f nie jest różniczkowalna w (0,0)

W naszym przypadku dla $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$ (17)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$

$A = (0,0)$, $A(h_1,h_2) = (0,0)\cdot(h_1,h_2) = 0$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-A(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} \neq 0,$$

bo dla $(h_{1n},h_{2n}) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h_{1n}h_{2n}}{h_{1n}^2+h_{2n}^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$

Zatem f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$

Zad 12 $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Różniczkowalność w $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \sin\frac{1}{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} \underbrace{t}_{\to 0}\, \underbrace{\sin\frac{1}{t^2}}_{\text{ograniczone}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \sin\frac{1}{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t^2} = 0$$

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0) \qquad A(h_1,h_2) = 0$$

Czy A jest różniczką f w $(0,0)$?

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - A(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{(h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}_{\to 0}\, \underbrace{\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2}}_{\text{ograniczony}} = 0.$$

Zatem f jest różniczkowalna w $(0,0)$ i $Df(0,0) = (0,0)$

Czy f jest klasy C^1 w $(0,0)$? Tzn. czy f ma ciągłe pochodne cząstkowe w $(0,0)$ (19)

Żeby to sprawdzić wyliczamy pochodne cząstkowe dla $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)(-1)\frac{1}{(x^2+y^2)^2} 2x \cos\frac{1}{x^2+y^2} = 2x \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \underbrace{\frac{2x}{x^2+y^2}}_{\text{nieograniczone}} \cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

To jest nieograniczone w dowolnym otoczeniu zera, bo

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ x=y}} \frac{2x}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$$

Podobnie $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ jest nieograniczone w dowolnym otoczeniu zera

Oznacza to, że $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

A to oznacza, że pochodne cząstkowe nie są ciągłe w $(0,0)$, czyli f nie jest klasy C^1 w $(0,0)$

Zad 13

$f(x,y) = x \sin\sqrt{x^2+y^2}$ Czy klasy C^1? Poza $(0,0)$ tak

Sprawdzamy, czy pochodne cząstkowe są ciągłe w $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\to 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\sin|t|}{t} = \lim_{t\to 0}\sin|t| = 0$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\underbrace{\sin\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 0} + \frac{x^2\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ Zatem $\frac{\partial f}{\partial x}$ jest ciągła

$\to 0$, bo $\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le |x| \underset{x\to 0}{\to} 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\underbrace{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\to 0}\underbrace{\cos\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 1} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Zatem $\frac{\partial f}{\partial y}$ też jest ciągła

bo $\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2}}\right| \le |y| \underset{y\to 0}{\to} 0$

Odp: f jest klasy C^1 na $\mathbb{R}^2$