

Zad 20 ⁽²⁶⁾

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) \quad (1)$$

$$D_1 f(r, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial r}(r, \alpha) = \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$D_2 f(r, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(r, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{matr } df = Df = (D_1 f, D_2 f) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$Jf = \det \text{matr } df = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{vmatrix} = r \cos^2 \alpha + r \sin^2 \alpha = r$$

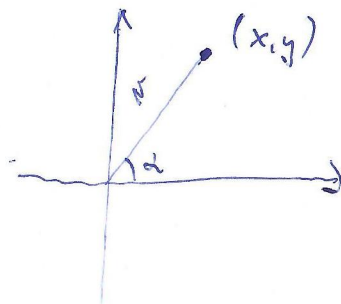
Zad 21 ⁽²⁷⁾

Na co funkcja f dana przez (1) przeprowadza:

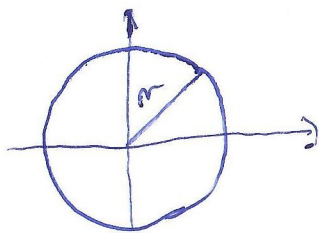
a) proste $r = \text{const}$

b) proste $\alpha = \text{const}$

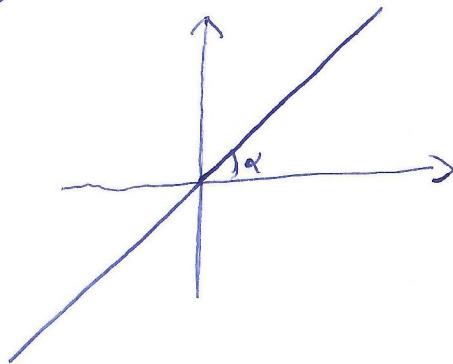
29



$$a) r = \text{const} \Rightarrow$$



$$b) \alpha = \text{const} \Rightarrow$$



(28)
Zad 25

$G = \{ (r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : r > 0 \}$ czy f jest lokalnie różnowartościowa?

$f(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ czy f jest różnowartościowa na G ?

Sprawdźmy, czy f spełnia założenia twierdzenia o funkcji odwrotnej:

- 1) f jest klasy C^1 - tak, bo pochodne występują są ciągłe
- 2) f jest nieosobliwa na G (tzn. $\forall (r, \alpha) \in G \exists f(r, \alpha) \neq 0$) - tak, bo $\exists f(r, \alpha) = r$

Ponieważ są spełnione założenia, to z twierdzenia o funkcji odwrotnej możemy lokalnie znaleźć funkcję odwrotną do f , czyli f jest lokalnie różnowartościowa na G .
 f nie jest różnowartościowa na G , bo $f(r, \alpha) = f(r, \alpha + 2\pi)$

(29)

Zad 26

$$G_0 = \{ (r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, -\pi < \alpha < \pi \}$$

Pokażemy, że f jest różnowartościowa na G_0 . Niech $(r_1, \alpha_1), (r_2, \alpha_2) \in G_0$ i

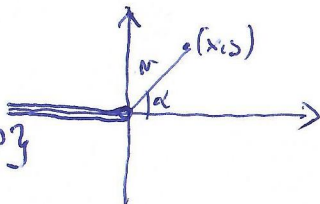
$$f(r_1, \alpha_1) = f(r_2, \alpha_2) \Rightarrow \begin{cases} r_1 \cos \alpha_1 = r_2 \cos \alpha_2 & (1)^2 \\ r_1 \sin \alpha_1 = r_2 \sin \alpha_2 & (2)^2 \end{cases}$$

$$+ \frac{\quad}{r_1^2 = r_2^2} \Rightarrow r_1 = r_2$$

$$\begin{cases} \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 \\ \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 \\ \text{lub} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ |\alpha_2 - \alpha_1| = \pi \end{cases}$$

Co to jest $f(G_0)$?

$$f(G_0) = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x, 0) : x \leq 0 \}$$



ale jeśli np $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$, to
 $\sin \alpha_2 = \sin(\alpha_1 + \pi) = -\sin \alpha_1$ i $\sin \alpha_2 = \sin \alpha_1$
 wtedy $\alpha_1 = \pi$, czyli $\alpha_1 = 0$, ale wtedy
 $\alpha_2 \in (-\pi, \pi)$ - sprzeczność z $|\alpha_2 - \alpha_1| = \pi$
 Wobec tego $\alpha_1 = \alpha_2$

(32)

Niech $g = f^{-1}$. Ponieważ są spełnione założenia twierdzenia o funkcji odwrotnej, to istnieje lokalnie f^{-1} i f jest różnowartościowe, więc $g = f^{-1}$ istnieje na $f(b_0)$ i z twierdzenia o funkcji odwrotnej jest klasy C^1 .

Co to jest $\text{matr } dg$?

$$\text{matr } dg(x, y) = (\text{matr } df(r, \alpha))^{-1}, \text{ gdzie } x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}, \alpha = \arctg \frac{y}{x}$$

$$\text{matr } dg(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \alpha & r \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\frac{\sin \alpha}{r} & \frac{\cos \alpha}{r} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{r \cos \alpha}{r} & \frac{r \sin \alpha}{r} \\ -\frac{r \sin \alpha}{r^2} & \frac{r \cos \alpha}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Można bezpośrednio:

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha = r^2 \\ \frac{y}{x} = \frac{r \sin \alpha}{r \cos \alpha} = \tan \alpha \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

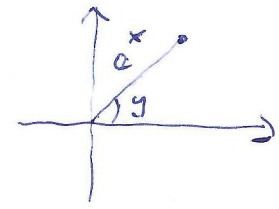
$$\alpha = \arctg \frac{y}{x}$$

$$g(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{x}) \quad \text{matr } dg(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

(30)
Zad 27
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

a) ~~Co to jest~~ $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$



b) $f(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$Jf(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

c) f nie jest 1-1, bo $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$

(31)
Zad 28

Wizuj g - funkcja odwrotna do f w otoczeniu $b = f(a)$, $a = (0, \frac{\pi}{3})$; tak, że $g(b) = a$.

a) Znaleźć jawną postać g

(34)

$$\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases} \quad - \text{ należy z tego układu wyliczyć } (x, y)$$

$$u^2 + v^2 = e^{2x} \quad y = \arctg \frac{v}{u} \quad b = f(a) = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$x = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2)$$

$$g(u, v) = \left(\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2), \arctg \frac{v}{u} \right) \quad - \text{ f. odwrotna do } g$$

$$g(b) = g\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right), \arctg \sqrt{3} \right) = \left(0, \frac{\pi}{3} \right) = a \quad - \text{ g spełnia } g(b) = a$$

b) Obliczyć $df(a)$ i $dg(b)$

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \quad df(a) = df\left(0, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$g(u, v) = \left(\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2), \operatorname{arctg} \frac{v}{u} \right)$$

$$dg(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{u}{u^2 + v^2} & \frac{v}{u^2 + v^2} \\ -\frac{v}{u^2 + v^2} & \frac{u}{u^2 + v^2} \end{pmatrix}$$

$$dg(b) = dg\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$df(a) \cdot dg(b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zatem

$$dg(b) = [df(g(b))]^{-1} \text{ lub inaczej } dg(f(a)) = [df(a)]^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \operatorname{arctg} \frac{v}{u} = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{u^2}} \left(-\frac{v}{u^2} \right) = \frac{-v}{u^2 + v^2} \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \operatorname{arctg} \frac{v}{u} = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{u^2}} \cdot \frac{1}{u} = \frac{u}{u^2 + v^2}$$

Zad 26

$$1 < \frac{y}{x^2} < 2$$

$\Downarrow$

$$1) G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2, 1 < xy < 2\}$$

$$P = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u < 2, 1 < v < 2\}$$

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x^2} \\ v = xy \end{cases} \quad \text{wynikamy } (x, y) \Rightarrow$$

$$\frac{v}{u} = x^3 \Rightarrow x = v^{1/3} u^{-1/3}$$

$$y = \frac{v}{x} = v^{2/3} u^{1/3}$$

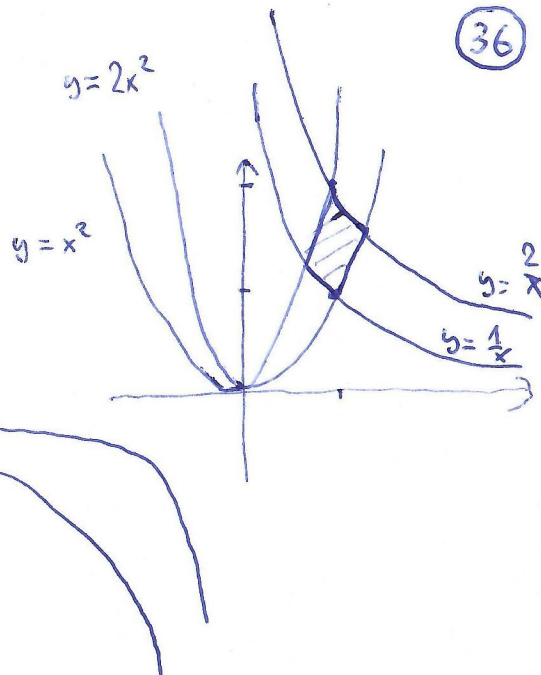
$$\varphi(u, v) = (v^{1/3} u^{-1/3}, v^{2/3} u^{1/3}) \quad \varphi: P \rightarrow G$$

φ jest na i 1-1 : wynika z definicji zbiorów G i P oraz z jednoznaczności rozwiązań

(*) Wykażemy, że φ jest ~~nieosobliwa~~ (ten), klasy C^1 i nieosobliwa

$$D\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} v^{1/3} u^{-4/3} & \frac{1}{3} v^{-2/3} u^{-1/3} \\ \frac{1}{3} v^{2/3} u^{-2/3} & \frac{2}{3} v^{-1/3} u^{1/3} \end{pmatrix}, \quad J\varphi(u, v) = -\frac{2}{9} u^{-1} - \frac{1}{9} u^{-1} = -\frac{1}{3u} < 0 \text{ na } P \Rightarrow \varphi \text{ nieosobliwa}$$

klasy C^1 na $P \rightarrow$ Zatem φ jest dyfeomorfizmem $\varphi: P \xrightarrow{\text{dyfeom}} G$

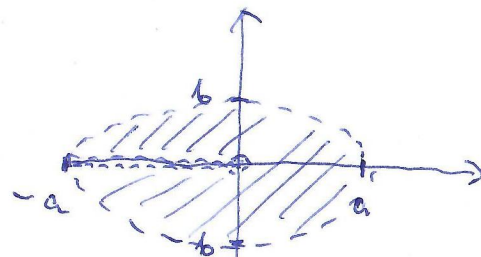


(36)

$$2. G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1 \right\} \setminus \left\{ (x, 0) : x \leq 0 \right\}, \quad a, b > 0$$

$$\varphi(r, \alpha) = (ra \cos \alpha, rb \sin \alpha) \quad 0 < r < 1, \quad -\pi < \alpha < \pi$$

$$P = (0, 1) \times (-\pi, \pi)$$



$$\varphi: P \rightarrow G \quad \varphi \text{ jest na} \quad (\text{bo } \forall (x, y) \in G \exists (r, \alpha) \in (0, 1) \times (-\pi, \pi) \text{ t.j. } \varphi(r, \alpha) = (x, y))$$

$$1-1: \text{ Niech } \varphi(r_1, \alpha_1) = \varphi(r_2, \alpha_2) \text{ dla pewnych } (r_1, \alpha_1), (r_2, \alpha_2) \in G$$

$$\begin{cases} r_1 a \cos \alpha_1 = r_2 a \cos \alpha_2 & / : a \\ r_1 b \sin \alpha_1 = r_2 b \sin \alpha_2 & / : b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow r_1 = r_2 \\ \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \quad (\text{bo } \alpha_1, \alpha_2 \in (-\pi, \pi))$$

$$D\varphi(r, \alpha) = \begin{pmatrix} a \cos \alpha & -ra \sin \alpha \\ b \sin \alpha & rb \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad J\varphi(r, \alpha) = rab \cos^2 \alpha + rab \sin^2 \alpha = rab > 0 \Rightarrow$$

klasę $C^1 \rightarrow \Rightarrow \varphi$ jest nieosobliwa na P

Ponieważ φ jest 1-1, na , klasę C^1 , nieosobliwa, to $\varphi: P \xrightarrow[dyfteo]{1-1, \text{na}} G$