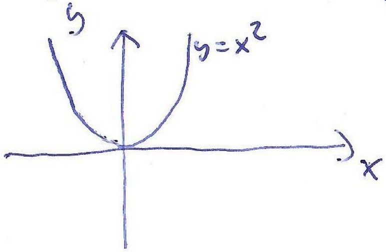
<u>Zad 30</u> czy φ dyfeomorfizm i czy $\varphi(\mathbb{R})$ jest łukiem otwartym

1. $\varphi(t) = (t^3, t^6)$, $t \in \mathbb{R}$



$\varphi(\mathbb{R})$ - wykres funkcji $y = x^2$ na $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ łuk otwarty

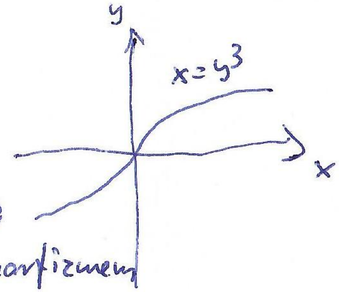
$x = t^3$
$y = t^6 = x^2$

φ jest 1-1, C^1

czy φ nieosobliwa? $D\varphi(t) = (3t^2, 6t^5)$ rank $D\varphi(t) = 1$ $\forall_{t \neq 0}$

ale rank $D\varphi(0) = 0$ $\Rightarrow$ φ nie jest dyfeomorfizmem

2. $\varphi(t) = (t, \sqrt[3]{t})$, $t \in \mathbb{R}$ $\varphi(\mathbb{R})$ - łuk otwarty



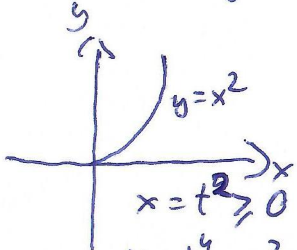
$x = t$
$y = \sqrt[3]{t}$
$x = y^3$

φ jest 1-1, ale nie jest C^1, bo

$D\varphi(t) = (1, \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}})$ - nie jest określone dla $t=0$

$\Rightarrow$ φ nie jest dyfeomorfizmem

3. $\varphi(t) = (t^2, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$



φ nie jest 1-1: $\varphi(t) = \varphi(-t)$

$x = t^2 \geq 0$
$y = t^4 = x^2$

$\varphi(\mathbb{R}^2) = \{(x,y) : x \geq 0, y = x^2\}$ to nie jest otwarty podzbiór wykresu funkcji $y = x^2$ $\Rightarrow$ to nie jest łuk otwarty

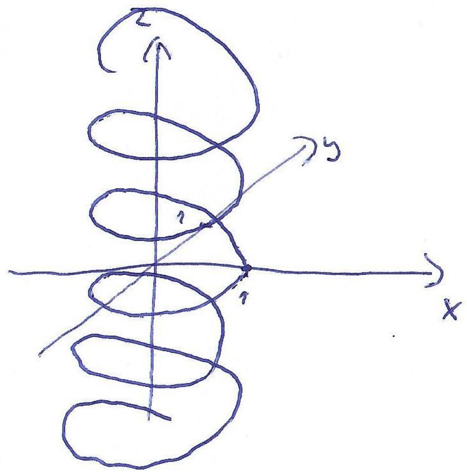
Zad 31 $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$

- jest 1-1 bo $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$
- jest klasy C^1, bo $D\varphi(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$
- jest nieosobliwa, bo $\operatorname{rank} D\varphi(t) = 1 \ \forall_{t \in \mathbb{R}}$
- φ^{-1} jest ciągła, bo $\varphi^{-1}(x, y, z) = z$ - rzutowanie na współrzędną jest ciągłe

Zatem $\varphi : \mathbb{R} \underset{\text{dyfeo}}{\xrightarrow{1-1,\text{ na}}} \varphi(\mathbb{R})$

$\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$

linia śrubowa (rozmaitość 1-wymiarowa w $\mathbb{R}^3$

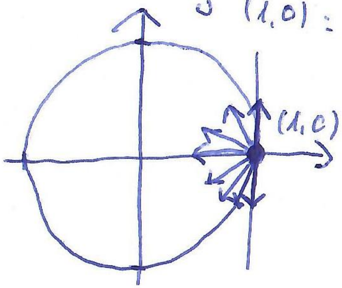


Zad 32 Czy S rozmaitość?

Metoda: aby wykazać, że S nie jest rozmaitością wystarczy znaleźć punkt $x_0 \in S$ dla którego zbiór $T_w(x_0, S)$ nie jest podprzestrzenią liniową.

1° $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

wektory styczne wewnętrznie w $(1,0)$:



Rozwiązanie:

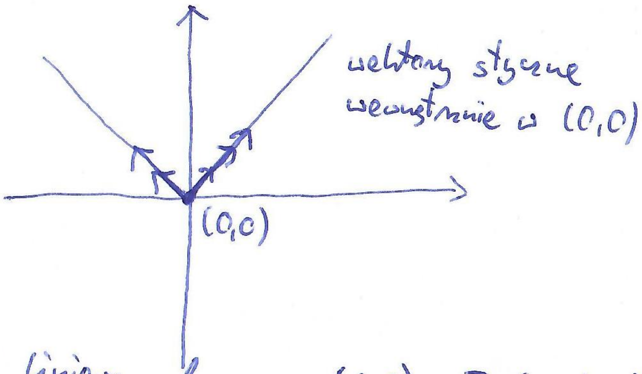
$(1,0) \in S$

$T_w((1,0), S) = \{v = (v_1, v_2) : v_1 \leq 0, v_2 \in \mathbb{R}\}$ - to nie jest przestrzeń liniowa, bo $v = (-1,0) \in T_w((1,0),S)$, ale $-v = (1,0) \notin T_w((1,0),S)$.

Zatem S nie jest rozmaitością

~~Zad. 33~~

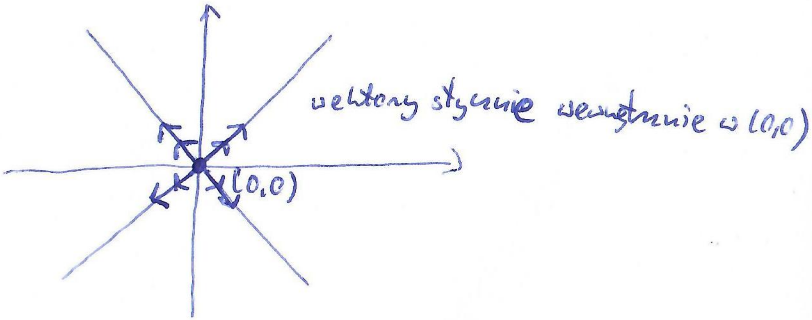
2° $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$



$(0,0) \in S$

$T_w((0,0),S) = S$ – to nie jest przestrzeń liniowa, bo $v = (1,1) \in T_w((0,0),S)$, ale $-v = (-1,-1) \notin T_w((0,0),S)$

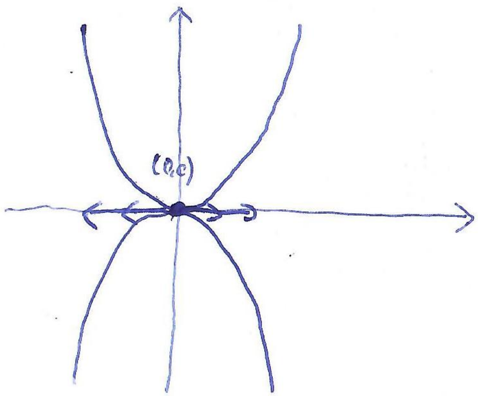
3° $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = |x|\}$



$(0,0) \in S$

$T_w((0,0),S) = T_z((0,0),S) = S$ – ale to też nie jest przestrzeń liniowa, bo $v = (1,1)$ i $w = (-1,1)$ należą do S, ale $v+w = (0,2) \notin S$

4° $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ |y| = x^2\}$



$(0,0)\in S$ – jedyny punkt podejrzany, dla którego może się psuć rozmaitość

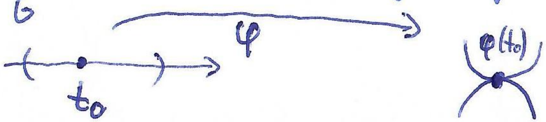
$T_w((0,0),S) = \{v=(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ – to jest podprzestrzeń liniowa, więc nie możemy wnioskować jak poprzednio, że to nie jest rozmaitość.

<u>Uwaga</u>: W twierdzeniu implikacja jest w jedną stronę!

S rozmaitość, $x_0\in S \Rightarrow T_w(x_0,S)$ podprzestrzeń liniowa

Wobec tego zastosujemy argument innego rodzaju („topologiczny")

Jeśli S jest rozmaitością, to istnieje mapa (φ, G) otoczenia tego punktu:



Ponieważ φ dyfeomorfizm, to G i $\varphi(G)\subset S$ są homeomorficzne, czyli $G\setminus\{t_0\}$ i $\varphi(G)\setminus\{(0,0)\}$ też są homeomorficzne

Ale to jest niemożliwe, bo te dwa zbiory mają różną liczbę spójnych składowych:

$G \setminus \{t_0\}$ - ma 2 spójne składowe

$\varphi(G) \setminus \{\varphi(t_0)\}$ - ma 4 spójne składowe

Zatem nie istnieje taki homeomorfizm φ, czyli tym bardziej nie istnieje dyfeomorfizm φ. Oznacza to, że S nie jest rozmaitością.

Zad 33

Uwaga: Jeżeli S - rozmaitość, to $T(x_0, S)$ - przestrzeń styczna do S w $x_0 \in S$,

$x_0 + T(x_0, S)$ - powierzchnia styczna (prosta styczna, płaszczyzna styczna) do S w x_0.

Wykazać, że $S = \{(x,y): x^2+y^2=1\}$ jest rozmaitością. Znaleźć przestrzeń i powierzchnię styczną do S w $(x_0,y_0) \in S$, gdzie $x_0 \neq -1$.

Mamy atlas złożony z dwóch map:

$\varphi_1 : G_1 = (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi_1(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \varphi_1(G_1) = S \setminus \{(-1,0)\}$

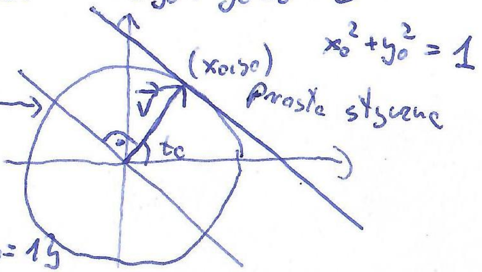
$\varphi_2 : G_2 = (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi_2(t) = (\cos t, \sin t) \qquad \varphi_2(G_2) = S \setminus \{(1,0)\}$

Ponieważ $x_0 \neq -1$, to istnieje $t_0 \in G_1$ takie, że $\varphi_1(t_0) = (x_0,y_0) = (\cos t_0, \sin t_0)$

$D\varphi_1(t_0) = (-\sin t_0, \cos t_0) = (-y_0, x_0)$ – wektor prostopadły do (x_0,y_0), bo $(x_0,y_0)\cdot(-y_0,x_0) = -x_0y_0 + y_0x_0 = 0$

$T((x_0,y_0),S) = \operatorname{span}\{(-y_0,x_0)\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x x_0 + y y_0 = 0\}$

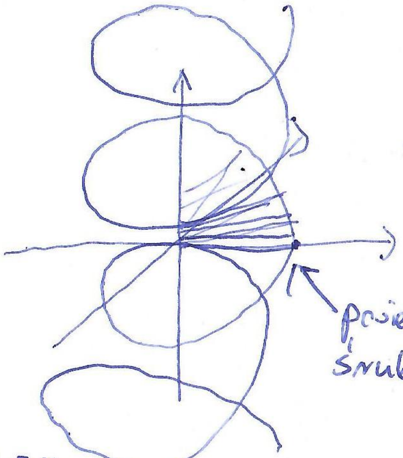


Równanie prostej stycznej

$T((x_0,y_0),S) + (x_0,y_0) = \{(x,y): (x-x_0)x_0 + (y-y_0)y_0 = 0\} = \{(x,y): x x_0 + y y_0 = 1\}$

Zad 34. $\varphi(r,\alpha) = (r\cos\alpha,\ r\sin\alpha,\ \alpha)$ dla $(r,\alpha) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$

1 φ jest dyfeomorfizmem



φ klasy C^1

φ 1-1, bo

$\varphi(r_1,\alpha_1) = \varphi(r_2,\alpha_2) \Rightarrow \cancel{(r_1\cos\alpha_1, r_1\sin\alpha_1) = (r_2}$

$(r_1\cos\alpha_1,\ r_1\sin\alpha_1,\ \alpha_1) = (r_2\cos\alpha_2,\ r_2\sin\alpha_2,\ \alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2,\ r_1 = r_2$

φ nieosobliwa, bo $D\varphi(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha, & r\cos\alpha \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ i $\operatorname{rank} D\varphi(r,\alpha) = 2$ $\forall_{(r,\alpha)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}}$

bo $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r > 0$

$\varphi^{-1}(x,y,z) = \Big(\overset{r}{\overset{\shortparallel}{\sqrt{x^2+y^2}}},\ \overset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{z}}\Big)$ - ciągła

Zatem φ - dyfeomorfizm i $S = \varphi((0,+\infty)\times\mathbb{R})$ jest płatem 2-wymiarowym

Znaleźć przestrzeń styczną i powierzchnię styczną do S w punkcie (1, 0, 0)

<u>Uwaga</u> Jeśli S rozmaitość z mapą (G, φ). Jak znaleźć przestrzeń i powierzchnię styczną w $x_0 \in S$ do S? Schemat postępowania:

1 Znajdujemy $t_0 \in G$ takie, że $x_0 = \varphi(t_0)$

2. Wyliczamy $D\varphi(t_0) = (D_1\varphi(t_0), \dots, D_k\varphi(t_0))$ (S - rozmaitość k-wymiarowa)

3. Podajemy rozwiązanie zgodnie z twierdzeniem z wykładu:

Przestrzeń styczna: $T(x_0, S) = \operatorname{span}\{D_1\varphi(t_0), \dots, D_k\varphi(t_0)\}$

Powierzchnia styczna $T(x_0, S) + x_0 = \operatorname{span}\{D_1\varphi(t_0), \dots, D_k\varphi(t_0)\} + x_0$

W naszym przypadku: $t_0 = \varphi^{-1}(1,0,0)$, $\varphi^{-1}(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2}, z)$, czyli

$$t_0 = (1,0), \quad D\varphi((1,0)) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{r=1\\ \alpha=0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Przestrzeń styczna:

$$T((1,0,0),S) = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\varphi(1,0), \frac{\partial}{\partial \alpha}\varphi(1,0)\right\} = \operatorname{span}\{(1,0,0), (0,1,1)\}$$

Płaszczyzna styczna

$$(1,0,0) + T((1,0,0),S) = \operatorname{span}\{(1,0,0), (0,1,1)\} + (1,0,0) = \operatorname{span}\{(1,0,0), (0,1,1)\}$$

(bo $(1,0,0) \in \operatorname{span}\{(1,0,0), (0,1,1)\}$

zad 35

$\mathbb{T} = \varphi(\mathbb{R}^2)$ - rozmaitość wymiaru 2

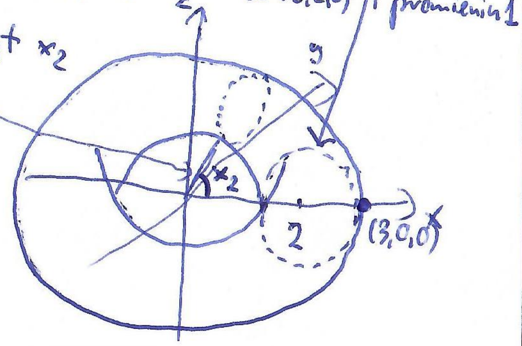
dla $x_2 = 0$ okrąg w płaszczyźnie xz o środku w $(2,0,0)$ i promieniu 1

$$\varphi(x_1, x_2) = ((2+\cos x_1)\cos x_2, (2+\cos x_1)\sin x_2, \sin x_1), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

atlas rozmaitości $\mathbb{T} = \varphi(\mathbb{R}^2)$

mapy: $(\varphi_1, G_1), (\varphi_2, G_2), (\varphi_3, G_3) (\varphi_4, G_4)$

obracany o kąt x_2 względem osi z



$\varphi_1(x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2)$, $G_1 = \{(x_1,x_2): -\pi < x_1 < \pi, -\pi < x_2 < \pi\}$

$\varphi_2(x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2)$, $G_2 = \{(x_1,x_2): -\pi < x_1 < \pi, 0 < x_2 < 2\pi\}$

$\varphi_3(x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2)$, $G_3 = \{(x_1,x_2): 0 < x_1 < 2\pi, -\pi < x_2 < \pi\}$

$\varphi_4(x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2)$: $G_4 = \{(x_1,x_2): 0 < x_1 < 2\pi, 0 < x_2 < 2\pi\}$

Znaleźć przestrzeń i płaszczyznę styczną do Π w punkcie $(3,0,0)$

Weźmy mapę (φ_1, G_1) $\qquad \varphi_1(0,0) = (3,0,0)$

Pokażemy, że $\varphi_1 : G_1 \to \varphi_1(G_1)$ dyfeomorfizm

φ_1 - klasy C^1

φ_1 1-1 : $\quad \varphi_1(x_1, x_2) = \varphi_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$

$$\begin{cases} (2+\cos x_1)\cos x_2 = (2+\cos\tilde{x}_1)\cos\tilde{x}_2 \\ (2+\cos x_1)\sin x_2 = (2+\cos\tilde{x}_1)\sin\tilde{x}_1 \\ \sin x_1 = \sin\tilde{x}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2+\cos x_1)^2 = (2+\cos\tilde{x}_1)^2 \Rightarrow \cos x_1 = \cos\tilde{x}_1$$

$$\begin{cases} \cos x_1 = \cos\tilde{x}_1 \\ \sin x_1 = \sin\tilde{x}_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \tilde{x}_1 \quad (\text{bo } x_1, \tilde{x}_1 \in (-\pi, \pi))$$

Wstawiając $x_1 = \tilde{x}_1$ do pierwszych dwu równań:

$$\begin{cases} (2+\cos x_1)\cos x_2 = (2+\cos\tilde{x}_1)\cos\tilde{x}_2 \\ (2+\cos x_1)\sin x_2 = (2+\cos x_1)\sin\tilde{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x_2 = \cos\tilde{x}_2 \\ \sin x_2 = \sin\tilde{x}_2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \tilde{x}_2$$

Zatem φ_1 jest 1-1

φ jest klasy C^1, bo pochodne cząstkowe są ciągłe

$$D\varphi(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} (2-\sin x_1)\cos x_2 & -(2+\cos x_1)\sin x_2 \\ (2-\sin x_1)\sin x_2 & (2+\cos x_1)\cos x_2 \\ \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

φ jest nieosobliwe, bo

$\operatorname{rank} D\varphi(x_1,x_2) = 2 \quad \forall_{(x_1,x_2)\in G_1}$, bo $\begin{vmatrix} (2-\sin x_1)\cos x_2 & -(2+\cos x_1)\sin x_2 \\ (2-\sin x_1)\sin x_2 & (2+\cos x_1)\cos x_2 \end{vmatrix} =$

$$= (2-\sin x_1)(2+\cos x_1)\underbrace{[\cos^2 x_2+\sin^2 x_2]}_{=1} =$$

$$(2-\sin x_1)(2+\cos x_2) > 0 \quad \forall_{(x_1,x_2)\in G_1}$$

φ^{-1} jest ciągłe:

$s = (2+\cos x_1)\cos x_2$

$t = (2+\cos x_1)\sin x_2$

$u = \sin x_1$

$s^2+t^2 = (2+\cos x_1)^2$

$2+\cos x_1 = \sqrt{s^2+t^2}$

$\cos x_1 = \sqrt{s^2+t^2}-2$

$\operatorname{tg} x_1 = \dfrac{u}{\sqrt{s^2+t^2}-2}$

$x_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{\sqrt{s^2+t^2}-2}$

$\operatorname{tg} x_2 = \dfrac{t}{s}$

$x_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{t}{s}$

$$\varphi^{-1}(s,t,u) = \left(\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{s^2+t^2}-2}\,,\ \operatorname{arctg}\frac{t}{s}\right)$$ - ciągłe

Zatem φ - dyfeomorfizm e

$$\varphi^{-1}(3,0,0) = (0,0)$$

$$D\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zatem: przestrzeń styczna:

$$T((3,0,0),\Pi) = \operatorname{span}\{(2,0,1),(0,3,0)\},$$

płaszczyzna styczna

$$T((3,0,0),\Pi) + (3,0,0) = \operatorname{span}\{(2,0,1),(0,3,0)\} + (3,0,0)$$