Twierdzenie o funkcji uwikłanej (TFU)

$F : E \overset{otw}{\subseteq} \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ klasy C^1, $F(a,b) = 0$ dla pewnego $(a,b) \in E$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$,

~~Wówczas~~ $DF(a,b) = A$; A_x - odwracalne

pierwsze n kolumn macierzy A

Wówczas w otoczeniu (a,b) równanie $F(x,y) = 0$ $(*)$ da się rozwikłać względem x,

tzn da się zapisać $(*)$ jako $x = g(y)$, gdzie g jest klasy C^1, oraz

$a = g(b)$, $F(g(y), y) = 0$ oraz $Dg(b) = -A_x^{-1} A_y$

ostatnie m kolumn A

Zad 36

$$\begin{cases} x+y+u\sin v = 0 \\ 2x+y-v\sin u = 0 \end{cases}$$

określa funkcje $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ w otoczeniu $(x_0,y_0,u_0,v_0)=(\pi, -\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

Pokażemy, że spełnione są założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej:

Mamy:

$$F(x,y,u,v) = (x+y+u\sin v,\ 2x+y-v\sin u)$$

1 $F(a,b)=0$: $F(x_0,y_0,u_0,v_0) = (\pi - \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi,\ 2\pi - \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi) = (0,0)$ ok

2 F jest klasy C^1: ← pochodne cząstkowe ciągłe

$$DF(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} \underbrace{1 \quad 1}_{} & \underbrace{\sin v, \quad u\cos v}_{} \\ 2 \quad 1 & -v\cos u, \quad -\sin u \end{pmatrix}$$

$$\qquad DF_{xy} \qquad\qquad DF_{uv}$$

3 $A = DF(a,b)$ i A_x odwracalna

DF_{uv} ← to musi być odwracalne, bo rozwikłujemy względem (u,v)

$$DF(x_0,y_0,u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -\sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$DF_{uv}(x_0,y_0,u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ – ta macierz jest odwracalna

Zatem z TFU w otoczeniu $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (\pi, -\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ układ równań da się rozwikłać względem (u,v) oraz

$$D(u,v)(x_0,y_0) = -DF_{uv}(x_0,y_0,u_0,v_0)^{-1} DF_{xy}(x_0,y_0,u_0,v_0) =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zatem $Du(x_0,y_0) = (-1,-1)$

$Dv(x_0,y_0) = (2,1)$

□

Zad 37 Znaleźć $\frac{dy}{dx}$ jeśli $x^2-2xy+3y^2-2x=0$

(58)

$$F(x,y) = x^2-2xy+3y^2-2x$$

$$DF(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) = (2x-2y-2, -2x+6y)$$

Da się rozwikłać $F(x,y)=0$ względem y jeśli: 1) F klasy C^1, $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \iff x \neq 3y$

Wówczas z TFU $F(x,y(x))=0 \;/\; \frac{\partial}{\partial x}$ $\quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

W naszym przypadku:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-2y-2}{-2x+6y} = \frac{x-y-1}{x-3y}$$

$\square$

Zad 38 Dla jakich $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ równanie $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ określa funkcję $y=y(x)$? 59

Rozw: 1° Znajdujemy F

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2+y^2 = 0$$

2° Sprawdzamy kiedy F spełnia założenia TFU:

a) F – klasy C^1

b) $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \iff 2(x^2+y^2)2y+2y\neq 0 \iff 2y\underbrace{(2(x^2+y^2)+1)}_{\text{zawsze dodatnie}}\neq 0 \iff y\neq 0$

Przy tych warunkach ~~mamy~~ możemy dostać funkcję $y=y(x)$

Zatem musimy odrzucić wszystkie $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ takie, że $F(x,y)=0$ i $y=0$,

czyli x t. że $F(x,0)=0 \iff x^4-x^2=0 \iff x^2(x^2-1)=0 \iff x=0 \lor x=-1 \lor x=1$

Ostatecznie dostajemy, że funkcja $y=y(x)$ jest określona na zbiorze

$$G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : F(x,y)=0\} \setminus \{(-1,0),(0,0),(1,0)\}.$$

$\square$

Zad 39. Znaleźć dz, gdy:

1. $xyz = x+y+z$

$F(x,y,z) = x+y+z-xyz$

$DF(x,y,z) = (1-yz, 1-xz, 1-xy)$. Zakładamy, że $\frac{\partial F}{\partial z} = 1-xy \neq 0$

Wówczas

$$dz = -\frac{1}{\partial F/\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(\frac{yz-1}{1-xy}, \frac{xz-1}{1-xy}\right)$$

□

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, $DF(x,y,z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$ $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2} \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0$

$$dz = -\frac{c^2}{2z}\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right) = \left(-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}, -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}\right)$$

□

Zad 40. $f(x, x+y, x+y+z) = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$ (61)

Uwaga: Równoważnie $dz = ?$, bo $dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial y}\right)$

$$F(x,y,z) = f(x, x+y, x+y+z) = 0$$

$DF = (D_1 f + D_2 f + D_3 f,\ D_2 f + D_3 f,\ D_3 f)$. Warunek: $D_3 f(x, x+y, x+y+z) \neq 0$

Wówczas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\partial F/\partial z} \cdot \partial F/\partial x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\partial F/\partial z} \cdot \partial F/\partial y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{D_1 f + D_2 f + D_3 f}{D_3 f}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{D_2 f + D_3 f}{D_3 f}$$

□

Przypuśćmy, że $y = y(x)$ rozwiązuje równanie $F(x, y) = 0$

Jak znaleźć $y''(x)$?

$$F(x, y(x)) = 0 \quad / \ \frac{\partial}{\partial x}$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0$. Musi być spełniony warunek $\partial F / \partial y \neq 0$. Wówczas

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F / \partial x (x, y)}{\partial F / \partial y (x, y)} \quad / \ \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} \right) \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{dy}{dx} \right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2}$$

wzór na drugą pochodną funkcji uwikłanej (*)

Zad 41. $x^2+xy+y^2=3$

1. Znaleźć równanie stycznej do $y=y(x)$ w $(1,1)$.

Równanie stycznej $y=ax+b$ musi spełniać warunki:

a) $a=\frac{dy}{dx}$ w $(1,1)$ (prosta jest styczna do krzywej w $(1,1)$)

b) $y(1)=1$ (styczna przechodzi przez punkt $(1,1)$)

$\frac{dy}{dx}=?$ $F(x,y)=x^2+xy+y^2-3=0$, $DF=(2x+y,\ 2y+x)$. $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=3\neq 0$ $\Downarrow$ da się rozwikłać

$$\underset{y'}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{2x+y}{2y+x} \qquad \frac{dy}{dx}=-1 \text{ dla } (x,y)=(1,1)$$

Stąd $a=-1$ (war a))

$y=-x+b$ musi przejść przez $(1,1)$ (war b))

$1=-1+b \Rightarrow b=2$ Zatem równanie stycznej do $y=y(x)$ w $(1,1)$ ma postać $y=-x+2$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$. Zatem korzystając ze wzoru (*)

$$y'' = -\frac{(2+y')(2y+x) - (2x+y)(1+2y')}{(2y+x)^2} = -\frac{4y+2x+2yy'+y'x-2x-4xy'-y-2yy'}{(2y+x)^2}$$

$$= -\frac{3y-3xy'}{(2y+x)^2} = \frac{3x\left(-\frac{2x+y}{2y+x}\right)-3y}{(2y+x)^2} = -\frac{3x(2x+y)+3y(2y+x)}{(2y+x)^3} =$$

$$= -\frac{6x^2+3xy+6y^2+3xy}{(2y+x)^3} = -\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(2y+x)^3}$$

$\square$

Ekstrema funkcji uwikłanej

$F(x,y) = 0$. Znaleźć ekstrema funkcji $y = y(x)$.

I Warunek konieczny istnienia ekstremum

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ \partial F/\partial y\,(x,y) \neq 0 \quad \text{(wtedy możemy rozwikłać } y = y(x)\text{)} \\ \partial F/\partial x\,(x,y) = 0 \quad \text{(bo } \dfrac{dy}{dx} \overset{y'(x)}{=} -\dfrac{\partial F/\partial x\,(x,y)}{\partial F/\partial y\,(x,y)}\text{, czyli } \dfrac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases}$$

II Dodatkowy warunek wystarczający istnienia ekstremum:

a) maksimum $y''(x) < 0 \Leftrightarrow w(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$

b) minimum $y''(x) > 0 \Leftrightarrow w(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) < 0$

bo:
$$y''(x) = -\frac{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\overset{0}{y'}\right)\dfrac{\partial F}{\partial y} - \overset{0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} =$$

$$= -\underset{\text{wyróżnik}}{w(x,y)}$$

Zad 42 $x^2+y^2-xy-2x+4y=0$

Znaleźć ekstrema $y=y(x)$

$$F(x,y) = x^2+y^2-xy-2x+4y$$

I Warunek konieczny:

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2+y^2-xy-2x+4y = 0 \\ \partial F/\partial x\,(x,y) = 2x-y-2=0 \\ \partial F/\partial y\,(x,y) = 2y-x+4 \neq 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$y = 2x-2 = 2(x-1)$$

$$x^2+4(x-1)^2-2x(x-1)-2x+8(x-1)=0$$

$$x^2+4x^2-8x+4-2x^2+2x-2x+8x-8=0$$

$$3x^2-4=0$$

$$(\sqrt{3}x-2)(\sqrt{3}x+2)=0 \quad x=\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ lub } x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Mamy 2 pary rozwiązań

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ y_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}}-2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y - x + 4 \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x - y - 2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1) = \frac{8}{\sqrt{3}} - 4 - \frac{2}{\sqrt{3}} + 4 = \frac{6}{\sqrt{3}} \neq 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_2,y_2) = -\frac{8}{\sqrt{3}} - 4 + \frac{2}{\sqrt{3}} + 4 = -\frac{6}{\sqrt{3}} \neq 0$$

Warunek wystarczający:

$$(x_1,y_1) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}} - 2\right)$$

$w(x_1,y_1) = \dfrac{\partial^2 F/\partial x^2}{\partial F/\partial y} = \dfrac{2}{6/\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} > 0 \Rightarrow$ w (x_1,y_1) funkcja $y(x)$ ma maksimum

$$(x_2,y_2) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}} - 2\right)$$

$w(x_2,y_2) = \dfrac{\partial^2 F/\partial x^2}{\partial F/\partial y} = \dfrac{2}{-6/\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} < 0 \Rightarrow$ w (x_2,y_2) funkcja $y(x)$ ma minimum

$\square$