

Zad 43 Czy  $S$  rozmierność?  $T(p, S) = ?$ ,  $N(p, S) = ?$

(68)

a)  $S = \{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 1\}$   $m \geq 2$ ,  $a_1, \dots, a_m > 0$

Jak rozstrzygnąć?

1° Znaleźć  $F: E \stackrel{\text{to}}{\subset} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^L$  takie, że  $S = \{x \in E : F(x) = 0\}$

2° Wyznaczyć  $DF(x)$

3° Sprawdzić, czy  $F$  klasy  $C^1$  i czy  $\text{rank } DF(x) = L \quad \forall x \in E$

4° Jeśli tak, to  $S$  jest rozmiernością wymiaru  $m-L$

5°  $T(p, S) = \ker DF(p) = \{v \in \mathbb{R}^m : DF(p)v = 0\}$

6°  $N(p, S) = \text{span } \{ \text{grad } F_1(p), \dots, \text{grad } F_L(p) \}$

$F$  klasy  $C^1$   
↓

a)  $F(x) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - 1$   $DF(x) = \text{grad } F(x) = \left(\frac{2x_1}{a_1^2}, \dots, \frac{2x_m}{a_m^2}\right)$

Jeśli  $x \in S$ , to co najmniej jedna współrzędna jest niezerowa,  
czyli  $\text{rank } DF(x) \geq 1 \quad \forall x \in S$

Zatem  $S$  jest rozmaitością  $(m-1)$  wymiarową

(69)

$$T(p, S) = \{v \in \mathbb{R}^m : DF(p)v = 0\} = \left\{v \in \mathbb{R}^m : \frac{p_1 v_1}{a_1^2} + \dots + \frac{p_m v_m}{a_m^2} = 0\right\}$$

$$N(p, S) = \text{span} \left\{ \frac{2p_1}{a_1^2}, \dots, \frac{2p_m}{a_m^2} \right\}$$

b)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0, x^2+y^2=1\}$

$$F(x, y, z) = (x+y+z, x^2+y^2-1)$$

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \quad F \text{ klasy } C^1, \text{ bo pochodne cząstkowe są ciągłe}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x \neq 0 \text{ dla } x \neq 0$$

ponieważ  $\forall (x, y, z) \in S$   $x \neq 0$  lub  $y \neq 0$  (bo  $x^2+y^2=1$ )

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -2y \neq 0 \text{ dla } y \neq 0 \quad \text{to rank } DF(x, y, z) = 2 \quad \forall (x, y, z) \in S$$

Zatem  $S$  jest rozmaitością wymiaru  $3 - 2 = 1$

70

$$T(p, S) = \{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : DF(p)(v_1, v_2, v_3) = 0 \} =$$

$$\{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_1 + v_2 + v_3 = 0, \quad 2p_1 v_1 + 2p_2 v_2 = 0 \}$$

$$N(p, S) = \text{span} \{ (1, 1, 1), (2p_1, 2p_2, 0) \}$$

Zad 44,  $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 169 \}$ ,  $p = (3, 4, 12)$

$$T(p, S) = ? \quad N(p, S) = ?$$

klasy (1

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 169, \quad DF(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \quad \text{rank } DF(x, y, z) = 2 \quad \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

$$\text{Zatem rank } DF(x, y, z) = 2 \quad \forall (x, y, z) \in S$$

$S$  - rozmaitość wymiaru 2

$$T(p, S) = \{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : 6v_1 + 8v_2 + 24v_3 = 0 \} = \{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : 3v_1 + 4v_2 + 12v_3 = 0 \}$$

$$N(p, S) = \text{span} \{ (3, 4, 12) \}$$

71

### Zad 45

Dok znaleźć ekstrema  $f$  na  $S$ :

- 1°. Znajdujemy  $F$  takie, że  $S = \{x : F(x) = 0\}$ ,  $F : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $n > m$ )
- 2°. Wyliczamy  $DF(x)$  i wykazujemy, że  $F$  jest klasy  $C^1$  i  $\text{rank } DF(x) = m \quad \forall x \in S$
- 3°. Znajdujemy funkcję Lagrange'a:  $g(x) = f(x) - \lambda F(x)$
- 4°. Znajdujemy  $x, \lambda$  spełniające równania:
 
$$\begin{cases} Dg(x) = 0 \\ F(x) = 0 \end{cases}$$
- 5°. Sprawdzamy dla każdego rozwiązania układu  $x$  wartość  $f(x)$ :
  - dla największej wartości - o tym punkcie mamy maksimum
  - dla najmniejszej wartości - tutaj mamy minimum.

$$1. S = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + \dots + x_m^2 = 1\}, \quad f(x) = x_1 \dots x_m$$

2

$$F(x) = x_1^2 + \dots + x_m^2 - 1 \quad DF(x) = (2x_1, \dots, 2x_m) \text{ klasy } C^1, \text{ rank } DF(x) = 1 \quad \forall x \neq 0,$$

Zatem spełnia się założenia twierdzenia o mnożnikach Lagrange'a. czyli też  $\forall x \in S$ .

$$g(x) = x_1 \dots x_m - \lambda (x_1^2 + \dots + x_m^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{x_1 \dots x_m}{x_i} - 2x_i \lambda = 0, i=1, \dots, m \Rightarrow x_1 \dots x_m = 2x_i^2 \lambda \\ x_1^2 + \dots + x_m^2 = 1 \end{cases}$$

$$^m x_1 \dots x_m = 2(x_1^2 + \dots + x_m^2) \lambda = 2\lambda$$

$$2x_i^2 \lambda = \frac{2\lambda}{m} \Rightarrow x_i^2 = \frac{1}{m}, x_i = \pm \sqrt{\frac{1}{m}}$$

$$\text{Zatem } \max_S f = \frac{1}{m^{\frac{m}{2}}}, \quad \min_S f = -\frac{1}{m^{\frac{m}{2}}}$$

up                      ||                      up                      ||

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{m}}, \dots, \sqrt{\frac{1}{m}}\right) \quad f\left(-\sqrt{\frac{1}{m}}, \sqrt{\frac{1}{m}}, \dots, \sqrt{\frac{1}{m}}\right)$$



$$2. S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \quad f(x, y, z) = x - 2y + 2z$$

33

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad DF(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \quad \text{rank } DF(x, y, z) = 1 \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

klasifikasi

Zaten rank  $DF(x, y, z) = 1 \quad (x, y, z) \in S$

$$g(x, y, z) = x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 & 2\lambda = \frac{1}{x} & x = \pm \frac{1}{3} \\ 2 - 2\lambda y = 0 & y = -2x \\ 2 - 2\lambda z = 0 & z = 2x \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ y_1 = -\frac{2}{3} \\ z_1 = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{2}{3} \\ z_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$f(x_1, y_1, z_1) = f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{0}{3} = 3 \leftarrow \text{maksimum}$$

$$f(x_2, y_2, z_2) = f\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -\frac{0}{3} = -3 \leftarrow \text{minimum}$$

74

$$3. S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}, \quad a > b > c > 0, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, \quad DF(x, y, z) = \left( \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right) - \text{klas } C^1$$

$$\text{rank } DF(x, y, z) = 1 \quad \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \Rightarrow \text{rank } DF(x, y, z) = 1 \quad \forall (x, y, z) \in S$$

Raten możemy zastosować metodę Lagrange'a:

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 2\lambda \frac{x}{a^2} = 0 \quad \text{niedk } x \neq 0: \text{ wówczas } \lambda = a^2, y = 0, z = 0, x = a$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y - 2\lambda \frac{y}{b^2} = 0 \quad \text{niedk } y \neq 0: \text{ wówczas } \lambda = b^2, x = 0, z = 0, y = b$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2z - 2\lambda \frac{z}{c^2} = 0 \quad \text{niedk } z \neq 0: \text{ wówczas } \lambda = c^2, x = 0, y = 0, z = c$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad 1) (x_1, y_1, z_1) = (a, 0, 0), \quad 2) (x_2, y_2, z_2) = (0, b, 0), \quad 3) (x_3, y_3, z_3) = (0, 0, c)$$

$$f(a, 0, 0) = a^2, \quad f(0, b, 0) = b^2, \quad f(0, 0, c) = c^2$$

↑  
maksimum

↑  
minimum

$$4. S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : x^2 + y^2 = 2, y + z = 2\}, f(x, y, z) = xy + yz$$

75

Ponieważ  $S$  nie jest zwarty, to ekstrema mogą być osiągnięte na brzegu tego obszaru

$$\inf_S f(x, y, z) = 0 \quad (\text{gdy } y \rightarrow 0, x \rightarrow \sqrt{2}, z \rightarrow 2)$$

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 2, y + z - 2)$$

$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{--- klasy } C^1 \\ \text{--- klasy } C^1 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x \neq 0 \text{ dla } x \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y \neq 0 \text{ dla } y \neq 0$$

$$\text{rank } DF(x, y, z) = 2 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Jeżeli  $(x, y, z) \in S$ , to  $(x, y) \neq (0, 0)$ , bo  $x^2 + y^2 = 2$ ,

zatem  $\text{rank } DF(x, y, z) = 2 \quad \forall (x, y, z) \in S$



$$g(x, y, z) = xy + yz - \lambda_1 (x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2 (y + z - 2)$$

36

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y - 2\lambda_1 x = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x + z - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = y - \lambda_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$y + z = 2$$

$$y = 1$$

$$z = 1$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \quad (\text{bo } x > 0)$$

$$\max_s f = f(1, 1, 1) = 2$$

$$\begin{cases} y = \lambda_2 \\ 2\lambda_1 = \frac{y}{x} \\ x + z - \frac{y^2}{x} - y = 0 \quad | \cdot x \\ z = 2 - y \\ x^2 = 2 - y^2 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + (2 - 2y)x - y^2 = 0$$

$$2 - y^2 + 2x - 2yx - y^2 = 0 \quad | \cdot -1$$

$$2y^2 + 2xy - 2(x+1) = 0 \quad | : 2$$

$$y^2 + xy - (x+1) = 0$$

$$\Delta = x^2 + 4(x+1) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

$$y_1 = \frac{-x - (x+2)}{2} = -x - 1$$

$$y_2 = \frac{-x + (x+2)}{2} = 1$$

$$(y-1)(y+x+1) = 0$$

$$\underline{y-1=0} \vee y+x+1=0$$

↑  
to jest niemożliwe, bo  
 $y, x > 0$