

Zadania domowe z analizy wektorowej.

Zestaw I

Zadanie 1. (po 1 pkt) Dla danego zbioru A znaleźć: zbiór punktów skupienia, zbiór punktów izolowanych, wnętrze $\text{Int } A$, domknięcie $\bar{A}$ i brzeg ∂A . Czy zbiór A jest otwarty/domknięty? Narysować zbiór A w układzie współrzędnych.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$,
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2\}$,
3. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$,
4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \cup [-2, 2] \times \{0\}$,
5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|\}$.
6. $A = \{((-1)^n, (\frac{1}{2})^n) : n \in \mathbb{N}\}$

Zadanie 2. (po 1 pkt) Zbadać zbieżność ciągów i dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice.

1. $(x_n, y_n) = (\log_{2n+3} 3, \frac{-3}{n})$,
2. $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{3^n}, \left(\frac{3}{4}\right)^{3n}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right)$.

Zadanie 3. (po 1 pkt) Zbadać istnienie granic:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy} \right) \right) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy} \right) \right) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy} \right)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} (y + x \sin(\frac{1}{y})) \right) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} (y + x \sin(\frac{1}{y})) \right) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (y + x \sin(\frac{1}{y}))$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \right) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \right) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \right) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \right) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} \right) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} \right) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \right) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \right) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|}$

Zadanie 4. (po 1 pkt) Znajdź granice funkcji:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$.
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$.
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, a)} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Zadanie 5. Zbadać ciągłość funkcji (po 1 pkt):

1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$