

Zadania domowe z analizy wektorowej.

Zestaw XV

Zadanie 52. (3 pkt)

Sprawdzić, że wartość całki krzywoliniowej niezorientowanej nie zależy od parametryzacji na przykładzie całki $\int_{\gamma} x^2 y \, ds$, jeśli γ jest krzywą opisaną równaniami:

1. $x(t) = 2 \cos(-t)$, $y(t) = 2 \sin(-t)$, gdzie $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$;
2. $x(t) = t$, $y(t) = \sqrt{4 - t^2}$, gdzie $t \in [0, 2]$.

Zadanie 53. (po 2 pkt)

Obliczyć podane całki krzywoliniowe niezorientowane po wskazanych krzywych:

1. $\int_{\gamma} xy \, ds$, gdzie γ — brzeg kwadratu $|x| + |y| \leq 1$;
2. $\int_{\gamma} \frac{xy}{z} \, ds$, gdzie γ — odcinek łączący punkty $(1, 1, 1)$ i $(2, 3, 4)$.

Zadanie 54. (po 2 pkt)

Obliczyć podane całki krzywoliniowe zorientowane z pola wektorowego F po krzywej γ dla

1. $F(x, y) = (y, -x^2)$, γ — krzywa $x(t) = t$, $y(t) = \frac{1}{2}t^2$, gdzie $t \in [0, 2]$;
2. $F(x, y) = (x + y, x - y)$, γ — krzywa $x(t) = 2 \cos t$, $y(t) = 4 \sin t$, gdzie $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Zadanie 55. (po 2 pkt)

Sprawdzić, że podane całki krzywoliniowe zorientowane nie zależą od kształtu krzywej całkowania i następnie obliczyć je:

1. $\int_{\gamma} 2xy^3 \, dx + 3x^2y^2 \, dy$, γ — krzywa o początku $A = (-2, 2)$ i końcu $B = (-1, 0)$;
2. $\int_{\gamma} y \sin x \, dx - \cos x \, dy$, γ — krzywa o początku $A = (0, 1)$ i końcu $B = (\pi, -1)$.

Zadanie 56. (po 2 pkt)

Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć podane całki krzywoliniowe zorientowane po krzywych dodatnio zorientowanych względem swego wnętrza:

1. $\oint_{\gamma} (1 - x^2)y \, dx + x(1 + y^2) \, dy$, γ — okrąg $x^2 + y^2 = 1$;
2. $\oint_{\gamma} (x^2 + y) \, dx + (x + y^2) \, dy$, γ — brzeg trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 1)$, $B = (3, 2)$, $C = (2, 5)$ zorientowanym dodatnio.