

Zadania domowe z analizy wektorowej.

Zestaw IX

Zadanie 30

Obliczyć drugie pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$ (1pkt),

2. $f(x, y, z) = x^{y^z}$ (2pkt).

Zadanie 31.

Niech f – funkcja dwukrotnie różniczkowalna. Znaleźć pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

1. $u(x, y) = f(x + y, xy)$ (1pkt),

2. $u(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$ (2pkt).

Zadanie 32. (po 1 pkt)

Znaleźć Δu , jeśli:

1. $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$,

2. $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Zadanie 33. (2 pkt)

Pokazać, że jeśli funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f = f(x, y)$ spełnia równanie Laplace'a (tzn. $\Delta f = 0$) to również $u(x, y) = f(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ spełnia to równanie.

Zadanie 34. (po 2 pkt)

Niech ϕ, ψ — funkcje dwukrotnie różniczkowalne. Wykazać, że:

1. $u(t, x) = \phi(x - at) + \psi(x + at)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2. $u(x, y) = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$