

## Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw I

**Zadanie 1.** Narysować podane zbiory i sprawdzić, czy są one: ograniczone, nieograniczone, otwarte, domknięte. Znaleźć: zbiór punktów skupienia, zbiór punktów izolowanych, wnętrze, domknięcie i brzeg podanych zbiorów.

1.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x \leq 3, y \geq 0\}$ ,
2.  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 > 4\}$ ,
3.  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |xy| < 1\}$ ,
4.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(2, 2)\}$ .
5.  $E = \{\frac{m}{n}: m, n \in \mathbb{N}\}$
6.  $F = \{(-1)^n(1 + \frac{1}{n}): n \in \mathbb{N}\}$

**Zadanie 1,5.** Zdefiniujemy w przestrzeni  $\mathbb{R}^k$  następujące normy:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^k |x_i| \quad \text{ i } \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, k} |x_i|.$$

- Narysować kule jednostkowe w tych normach dla  $k = 2$ .
- Wykazać, że normy te są równoważne z normą euklidesową (dwie normy  $\|\cdot\|$  i  $|||\cdot|||$  są równoważne, jeśli istnieją stałe  $c, C > 0$  takie, że  $c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\|$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}^k$ ).

**Zadanie 2.** Policzyc granicę ciągów:

1.  $(x_n, y_n, z_n) = (\frac{n^2}{n^2+3}, (1 + \frac{3}{n})^n, \cos n\pi)$
2.  $(x_n, y_n, z_n) = (5 + (\frac{2}{3})^n, \frac{n+5}{n^2+1}, \sqrt[n]{n})$

**Zadanie 3.** Niech  $f(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Zbadać istnienie granic  $\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$  i  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  dla:

1.  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$
2.  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$
3.  $f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

**Zadanie 4.** Znaleźć granice:

1.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{xy}$
2.  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, a)} \frac{\sin xy}{x}$

**Zadanie 5.** Zbadać ciągłość funkcji  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zadanej wzorem:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 y^2 + x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$