

Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw II

Zadanie 6. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Wykazać, że istnieją pochodne kierunkowe f w punkcie $(0, 0)$ w kierunku dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^2$, ale f nie jest ciągła w $(0, 0)$.

Zadanie 7. Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$ dla $x \neq 0$.

Zadanie 8. Znaleźć pochodne kierunkowe funkcji:

1. $f(x, y) = xy^2 + 2x$ w kierunku wektora $v = (1, 2)$.

Zadanie 9. Zbadać w jakich punktach jest różniczkowalna funkcja f oraz znaleźć Df , gdy:

1. $f(x) = \|x\|$ dla $x \in \mathbb{R}^n$.

Zadanie 10. Wykazać, że funkcja $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ jest ciągła w $(0, 0)$, posiada w tym punkcie obie pochodne cząstkowe, ale nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$.

Zadanie 11. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła w $(0, 0)$, ale nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$.

Zadanie 12. Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna w $(0, 0)$, ale jej pochodne cząstkowe nie są ciągłe w tym punkcie.