

Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw IV

Zadanie 20. Niech $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$f(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha). \quad (1)$$

Znaleźć D_1f , D_2f , matr df i Jf .

Zadanie 21. Na co funkcja f dana przez (1) przeprowadza proste $r = \text{const}$ i $\alpha = \text{const}$?

Zadanie 22. Niech $G = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2: r > 0\}$. Korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej wykaż, że funkcja f zadana przez (1) jest lokalnie różnowartościowa. Czy jest różnowartościowa na całym G ?

Zadanie 23. Niech $G_0 = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2: r > 0, -\pi < \alpha < \pi\}$. Wykaż, że f zadane przez (1) jest różnowartościowe na G_0 . Co to jest $f(G_0)$? Korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej wykaż, że funkcja $g = f^{-1}$ jest klasy C^1 oraz znajdź matr dg .

Zadanie 24. Niech $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y). \quad (2)$$

Jaki jest obraz f ? Pokazać, że $Jf(x, y) \neq 0$ dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ale f nie jest różnowartościowa.

Zadanie 25. Niech f zadane przez (2), $a = (0, \frac{\pi}{3})$, $b = f(a)$, zaś g — funkcja odwrotna do f określona w otoczeniu b i taka, że $g(b) = a$. Znaleźć jawną postać g . Obliczyć $df(a)$, $dg(b)$ i sprawdzić, czy $\text{matr } df(a) = [\text{matr } dg(b)]^{-1}$.