

Ćwiczenia z analizy wektorowej. Zestaw V

Zadanie 26. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^2$ na obszar $G \subset \mathbb{R}^2$ i narysować ten obszar jeśli:

1. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2, 1 < xy < 2\}$;
2. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1\} \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}, a, b > 0$.

Zadanie 27. Wykazać, że odwzorowanie $\Phi(r, \alpha, \beta) = (r \cos \beta \cos \alpha, r \cos \beta \sin \alpha, r \sin \beta)$ jest dyfeomorfizmem przedziału $P = \{(r, \alpha, \beta) : r > 0, -\pi < \alpha < \pi, -\pi/2 < \beta < \pi/2\}$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0\}$.

Zadanie 28. Znaleźć macierz różniczki dyfeomorfizmu odwrotnego względem dyfeomorfizmu sferycznego Φ z poprzedniego zadania.

Zadanie 29. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(x, y) = \left(\frac{ax}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{by}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$, gdzie $a, b > 0$, jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^2$ na obraz $\phi(\mathbb{R}^2)$. Znaleźć ten obraz.

Zadanie 30. Zbadać, czy odwzorowanie $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest dyfeomorfizmem i czy jego przeciwdziedzina jest łukiem otwartym, jeśli:

1. $\varphi(t) = (t^3, t^6), t \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi(t) = (t, \sqrt[3]{t}), t \in \mathbb{R}$;
3. $\varphi(t) = (t^2, t^4), t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 31. Wykazać, że odwzorowanie $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ jest dyfeomorfizmem. Jak wygląda jego przeciwdziedzina $\varphi(\mathbb{R})$?