Ćwiczenia z analizy wektorowej dla studentów zaocznych.
Zestaw I

Zadanie 1. Narysować podane zbiory i sprawdzić, czy są one: ograniczone, nieograniczone, otwarte, domknięte. Znaleźć: zbiór punktów skupienia, zbiór punktów izolowanych, wnętrze, domknięcie i brzeg podanych zbiorów.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \leqslant x \leqslant 3,\ y \geqslant 0\}$,
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 > 4\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < xy < 2\}$,
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |xy| < 1\}$,
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > |x|\}$,
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(2, 2)\}$.

Zadanie 2. Policzyć granicę ciągów:

1. $(x_n, y_n, z_n) = (\frac{n^2}{n^2+3}, (1 + \frac{3}{n})^n, \cos n\pi)$,
2. $(x_n, y_n, z_n) = (5 + (\frac{2}{3})^n, \frac{n+5}{n^2+1}, \sqrt[n]{n})$.

Zadanie 3. Niech $f(x, y) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zbadać istnienie granic $\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0} f(x, y))$, $\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0} f(x, y))$ i $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ dla:

1. $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$,
2. $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$,
3. $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$.

Zadanie 4. Znaleźć granice:

1. $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{xy}$,
2. $\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x}$.

Zadanie 5. Zbadać ciągłość funkcji $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2y^2+x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zadanie 6. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Wykazać, że istnieją pochodne kierunkowe f w punkcie $(0, 0)$ w kierunku dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^2$, ale f nie jest ciągła w $(0, 0)$.

Zadanie 7. Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ dla $x \neq 0$,
2. $f(x, y, z) = x^{yz}$ dla $x > 0$.

Zadanie 8. Znaleźć pochodne kierunkowe funkcji:

1. $f(x,y) = xy^2 + 2x$ w kierunku wektora $v = (1,2)$,
2. $f(x,y) = e^{x^2y}\sin(3xy)$ w kierunku wektora $v = (-1,1)$.

Zadanie 9. Zbadać w jakich punktach jest różniczkowalna funkcja f oraz znaleźć Df, gdy:

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
2. $f(x,y) = |x-y|$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 10. Wykazać, że funkcja $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ jest ciągła w $(0,0)$, posiada w tym punkcie obie pochodne cząstkowe, ale nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

Zadanie 11. Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła w $(0,0)$, ale nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

Zadanie 12. Wykazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna w $(0,0)$, ale jej pochodne cząstkowe nie są ciągłe w tym punkcie.

Zadanie 13. Zbadać, czy funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1, gdzie:

1. $f(x,y) = x\sin\sqrt{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = x\cos\sqrt{x^2+y^2}$

Zadanie 14. Niech $g(x,y,z) = x + yz$. Znaleźć $f'(t)$, gdzie $f(t) = g(\sin t, \cos t, t^2)$.

Zadanie 15. Pokazać, że funkcja $u(x,y) = x^n f(\frac{y}{x^2})$, gdzie f — dowolna funkcja różniczkowalna, spełnia równanie $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$.

Zadanie 16. Niech $u(x,y,z) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y-x, z-x)$, gdzie f — dowolna funkcja różniczkowalna. Obliczyć $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$.