Ćwiczenia z analizy wektorowej dla studentów zaocznych.
Zestaw II

Zadanie 17. Obliczyć drugie pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x, y) = x^y$ dla $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$;
2. $u(x, y, z) = f(x + y, \sin(x + z))$, gdzie f jest funkcją klasy C^2 na $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 18. Niech $f(x, y) = xe^{xy^2}$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wykazać, że f jest dwukrotnie różniczkowalna oraz znaleźć $D^2 f(1, 1)hh'$.

Zadanie 19. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna. Wykazać, że $g(t) = f(\cos t, \sin t)$ jest również dwukrotnie różniczkowalna oraz znaleźć jej drugą pochodną.

Zadanie 20. Policzyć $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ jeśli $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Zadanie 21. Niech $u(x, y, z) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y + z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y - x, z - x)$, gdzie f — dowolna funkcja różniczkowalna. Obliczyć $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$.

Zadanie 22. Znaleźć n-te pochodne cząstkowe funkcji f oraz $d^3 f(x, y)hh'h''$, gdzie

1. $f(x, y) = e^{2x+3y}$,
2. $f(x, y) = xye^{x+y}$.

Zadanie 23. Znaleźć wszystkie funkcje p-krotnie różniczkowalnie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takie, że $d^p f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 24. Rozwinąć funkcję $f(x, y) = x^y$ względem punktu $(e, 1)$ do pochodnych rzędu dwa.

Zadanie 25. Rozwinąć funkcję $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ w szereg Taylora względem punktu $(1, -2)$.

Zadanie 26. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje:

1. $f(x, y) = e^{4x-5y}$,
2. $f(x, y) = e^x \sin y$,
3. $f(x, y) = \ln(1 + x) \ln(1 + y)$.

Zadanie 27. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$f(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha). \tag{1}$$

Znaleźć $D_1 f$, $D_2 f$, $\operatorname{matr} df$ i Jf.

Zadanie 28. Na co funkcja f dana przez (1) przeprowadza proste $r = \text{const}$ i $\alpha = \text{const}$?

Zadanie 29. Niech $G = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \colon r > 0\}$. Korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej wykaż, że funkcja f zadana przez (1) jest lokalnie różnowartościowa. Czy jest różnowartościowa na całym G?

Zadanie 30. Niech $G_0 = \{(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \colon r > 0,\ -\pi < \alpha < \pi\}$. Wykaż, że f zadane przez (1) jest różnowartościowe na G_0. Co to jest $f(G_0)$? Korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej wykaż, że funkcja $g = f^{-1}$ jest klasy C^1 oraz znajdź $\operatorname{matr} dg$.

Zadanie 31. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y). \tag{2}$$

Jaki jest obraz f? Pokazać, że $Jf(x,y) \neq 0$ dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ale f nie jest różnowartościowa.

Zadanie 32. Niech f zadane przez (2), $a = (0, \frac{\pi}{3})$, $b = f(a)$, zaś g — funkcja odwrotna do f określona w otoczeniu b i taka, że $g(b) = a$. Znaleźć jawną postać g. Obliczyć $df(a)$, $dg(b)$ i sprawdzić, czy $\operatorname{matr} df(a) = [\operatorname{matr} dg(b)]^{-1}$.

Zadanie 33. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^2$ na obszar $G \subset \mathbb{R}^2$ i narysować ten obszar jeśli:

1. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 < y < 2x^2,\ 1 < xy < 2\}$;
2. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x^2 + y^2 < 4,\ 0 < x < y < 2x\}$;
3. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1\} \setminus \{(x,0) \colon x \leqslant 0\}$, $a, b > 0$.

Zadanie 34. Zbadać, czy odwzorowanie $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ jest dyfeomorfizmem i czy jego przeciwdziedzina jest łukiem otwartym, jeśli:

1. $\varphi(t) = (t^3, t^6)$, $t \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi(t) = (t, \sqrt[3]{t})$, $t \in \mathbb{R}$;
3. $\varphi(t) = (t^2, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 35. Wykazać, że odwzorowanie $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ jest dyfeomorfizmem. Jak wygląda jego przeciwdziedzina $\varphi(\mathbb{R})$?

Zadanie 36. Zbadaj, czy zbiór S jest rozmaitością, jeśli:

1. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;
2. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = |x|\}$;
3. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| = |x|\}$;
4. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| = x^2\}$.

Zadanie 37. Wykazać, że $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ jest rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i powierzchnię styczną do S w $(x_0, y_0) \in S$ gdzie $x_0 \neq -1$.

Zadanie 38. Wykazać, że odwzorowanie $\varphi(r, \alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, \alpha)$ określone dla $(r, \alpha) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ jest dyfeomorfizmem, czyli $\varphi((0, +\infty) \times \mathbb{R}) = S$ jest płatem 2-wymiarowym (zwanym powierzchnią śrubową). Znaleźć przestrzeń styczną i powierzchnię styczną do S w punkcie $(1, 0, 0)$.