

# Ćwiczenia z analizy wektorowej dla studentów zaocznych.

## Zestaw IV

**Zadanie 47.** Oblicz całki iterowane:

1.  $\int_1^2 dx \int_0^3 (x + y^2 x) dy$ ;
2.  $\int_0^3 dy \int_1^2 (x + y^2 x) dx$ .

**Zadanie 48.** Oblicz całki podwójne:

1.  $\iint_R e^{x+y} dx dy$ , gdzie  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ ;
2.  $\iint_R \sin(x + y) dx dy$ , gdzie  $R = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$ .

**Zadanie 49.** Przedstawić  $\iint_D f(x, y) dx dy$  w postaci całki iterowanej jeśli zbiór  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ograniczony jest krzywymi:

1.  $x^2 y^4 = 1$ ;
2.  $y = x^2, y = \sqrt{x}$ ;
3.  $y = 0, x = 2, y = x^2$ ;
4.  $y = \frac{1}{x}, y = x, y = 2x (x > 0)$ ;
5.  $x^2 + y^2 = 1$ ;
6.  $y = x^2, y = -x + 2, y = 0, x = \frac{2}{3}$ .

**Zadanie 50.** Obliczyć miarę zbioru:

1.  $A = \{(x, y): \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\}$ ;
2.  $B = \{(x, y, z): -1 < x < 1, -1 < y < 1, 0 < z < x^2 + y^2\}$ .

**Zadanie 51.** Zamienić kolejność całkowania w całkach iterowanych:

1.  $\int_0^4 (\int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy) dx$ .

**Zadanie 52.** Oblicz podane całki:

1.  $\iint_D (x^2 - xy) dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y): y \geq x, y \leq 3x - x^2\}$ ;
2.  $\iint_D xy dx dy$ , gdzie  $D$  jest ograniczony krzywymi  $xy = 1$  i  $|x - y| = 1$ ;
3.  $\iint_D x + y dx dy$ , gdzie  $D$  jest ograniczony krzywymi  $y = \sqrt{|x|}, 2y = |x|$  i  $|x| = 1$ ;
4.  $\iiint_P \ln x^{yz} dx dy dz$ , gdzie  $P = [1, e] \times [1, 2] \times [2, 3]$ ;
5.  $\iiint_P xyz dx dy dz$ , gdzie  $P = \{(x, y, z): y \geq x^2, x \geq y^2, 0 \leq z \leq xy\}$ ;
6.  $\iiint_P \cos \frac{z}{y} dx dy dz$ , gdzie  $P$  jest ograniczony krzywymi  $y = \frac{\pi}{6}, y = x, x = \frac{\pi}{2}, z = xy$  i  $z = 0$ .

**Zadanie 53.** Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych obliczyć całki

1.  $\iint_D xy dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y): 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 3\}$ ;
2.  $\iint_D (x + y) dx dy$ , gdzie  $D$  jest ograniczony krzywymi:  $2x + y = 2, 2x + y = 3, x - y = -1, x - y = 1$ .

**Zadanie 54.** Zamieniając na współrzędne biegunowe oblicz podane całki:

1.  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$  (wskazówka: oblicz najpierw  $I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$ );
2.  $\iint_D y dx dy$ , gdzie  $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ;
3.  $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ , gdzie  $D$  jest ograniczony krzywymi  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$  ( $x \leq 0$ ,  $y \geq 1$ ).

**Zadanie 55.** Zamieniając na współrzędne sferyczne oblicz podane całki:

1.  $\iiint_U z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , gdzie  $U$  jest obszarem ograniczonym powierzchniami  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ,  $z = 0$ ;
2.  $\iiint_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , gdzie  $U$  jest obszarem ograniczonym powierzchnią  $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$ .

**Zadanie 56.** Zamieniając na współrzędne walcowe oblicz podane całki:

1.  $\iiint_U x^2 dx dy dz$ , gdzie  $U$  jest obszarem ograniczonym powierzchniami  $z = 9 - x^2 - y^2$ ,  $z = 0$ ;
2.  $\iiint_U z^2 dx dy dz$ , gdzie  $U$  jest obszarem ograniczonym powierzchniami  $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$