Zadania przygotowawcze do kolokwium z analizy wektorowej dla studentów zaocznych

Zadanie 1. Dla danego zbioru A znaleźć: zbiór punktów skupienia, zbiór punktów izolowanych, $\operatorname{Int} A$, $\overline{A}$ i $\operatorname{Bd} A$. Czy zbiór A jest otwarty/domknięty?

1. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x_1 < 1, \ -1 < x_2 < 1\} \setminus \{(0,0)\}$
2. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x_1 < 1, \ 0 < x_2 < 1\}$
3. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\} \cup [-2,2] \times \{0\}$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność ciągów i dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice.

1. $(x_n, y_n) = (\log_{2n+3} 3, \frac{-3}{n})$,
2. $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{3^n}, \left(\frac{3}{4}\right)^{3n}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right)$.

Zadanie 3. Zbadać istnienie granic:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to\infty}(\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}))$ $\qquad \lim\limits_{y\to\infty}(\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}))$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}}(\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy})$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}(y + x\sin(\frac{1}{y})))$ $\qquad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}(y + x\sin(\frac{1}{y})))$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(y + x\sin(\frac{1}{y}))$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\lim\limits_{y\to\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2})$ $\qquad \lim\limits_{y\to\infty}(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2})$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2})$ $\qquad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2})$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2})$ $\qquad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2})$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|})$ $\qquad \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|})$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|}$

Zadanie 4. Znajdź granice funkcji:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$.
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$.
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,a)}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Zadanie 5. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji:

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zadanie 6. Policzyć $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ dla:

1. $u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
2. $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
3. $u(x, y) = f(x, \frac{x}{y})$, gdzie f — funkcja różniczkowalna.

Zadanie 7. Niech f — funkcja różniczkowalna. Wykazać ,że:

1. $u(x, y) = yf(x^2 - y^2)$ spełnia $y^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = xu$.
2. $u(x, y) = f(x^2 + y^2)$ spełnia $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. $u(x, y) = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$ spełnia $x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$.

Zadanie 8. Obliczyć drugie pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x, y) = \ln(x + y^2)$,
2. $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$,
3. $f(x, y) = x\sin(x + y)$,
4. $f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$,
5. $f(x, y, z) = x^{y^z}$.

Zadanie 9. Niech f – funkcja dwukrotnie różniczkowalna. Znaleźć pochodne czątkowe drugiego rzędu:

1. $u(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$,
2. $u(x, y) = f(x + y, xy)$,
3. $u(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$.

Zadanie 10. Znaleźć Δu, jeśli:

1. $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$,
2. $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,
3. $u(x, y, z) = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$ gdzie f — dwukrotnie różniczkowalna.

Zadanie 11. Pokazać, że jeśli funkcja dwukrotnie różniczkowalna $f = f(x, y)$ spełnia równanie Laplace'a (tzn. $\Delta f = 0$) to również $u(x, y) = f(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ spełnia to równanie.

Zadanie 12. Niech ϕ, ψ – funkcje dwukrotnie różniczkowalne. Wykazać, że:

1. $u(t, x) = \phi(x - at) + \psi(x + at)$ spełnia równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$
2. $u(x, y) = x\phi(x + y) + y\psi(x + y)$ spełnia równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Zadanie 13. Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji f:

1. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$ jeśli $f(x, y) = x\ln(xy)$,

2. $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ jeśli $f(x, y, z) = e^{xyz}$,

3. $\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$ jeśli $f(x, y) = (x - a)^p (y - b)^q$,

4. $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ jeśli $f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{x+y}$.

Zadanie 14. Znaleźć różniczkę $d^3 f(x, y) h h' h''$ dla:

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$,

2. $f(x, y) = \ln(x + y)$,

3. $f(x, y) = g(x + y)$, gdzie g – funkcja trzykrotnie różniczkowalna.

Zadanie 15. Napisać wzór Taylora względem punktu $(1, 1, 1)$ dla funkcji $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Zadanie 16. Napisać wzór Taylora do pochodnych rzędu 2 względem punktu $(0, 0)$ dla funkcji $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Zadanie 17. Rozwinąć w szereg Taylora względem punktu $(1, 1)$ funkcję $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

Zadanie 18. Rozwinąć w szereg MacLaurina funkcję f:

1. $f(x, y) = \ln(1 + 2x + 3y)$,

2. $f(x, y) = e^{3x} \cos(5y)$.

Zadanie 19. (Twierdzenie o funkcji odwrotnej)

1. Niech $\phi(u, v) = \Big(u + v \cos u, e^{2u}(v + 1)\Big)$. Wykazać, ze istnieje otoczenie U punktu $(0, 0)$, takie, że $\phi_{|U}$ jest dyfeomorfizmem na obraz. Obliczyć pochodną $(\phi_{|U})^{-1}$ w punkcie $(0, 1)$.

Zadanie 20. (Dyfeomorfizmy)

1. Niech $\phi(u, v) = (e^{u+v} + e^{u-v}, e^{u+v} - e^{u-v})$ dla $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Znaleźć $\phi(\mathbb{R}^2)$ oraz zbadać, czy ϕ jest dyfeomorfizmem.

2. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^2$ na obszar $G \subset \mathbb{R}^2$, narysować ten obszar:
   a) $G = \{(x, y) :\ y^2 < x < 2y^2,\ 2x^2 < y < 3x^2\}$,
   b) $G = \{(x, y) :\ O < x,\ 0 < y < x^2\}$.

3. Wykazać, że odwzorowanie $\Phi(r, \alpha, \beta) = (r \cos\beta \cos\alpha, r \cos\beta \sin\alpha, r \sin\beta)$ jest dyfeomorfizmem przedziału $P = \{(r, \alpha, \beta) :\ r > 0,\ -\pi < \alpha < \pi,\ -\pi/2 < \beta < \pi/2\}$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) :\ x \leqslant 0\}$.

4. Znaleźć macierz różniczki dyfeomorfizmu odwrotnego względem dyfeomorfizmu sferycznego Φ z poprzedniego zadania.

5. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(x, y) = \Big(\frac{ax}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{by}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Big)$, gdzie $a, b > 0$, jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}^2$ na obraz $\phi(\mathbb{R}^2)$. Znaleźć ten obraz.

Zadanie 21. (Rozmaitości i przestrzenie styczne)

1. Pokazać, że odwzorowanie $\phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$ (zwany linią śrubową). Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do linii śrubowej w punkcie $(1, 0, 0)$.

2. Niech $\phi : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$, $\phi(\alpha, \beta) = (\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\cos\beta, \sin\beta)$. Wykazać, że ϕ jest dyfeomorfizmem $(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na obraz. Znaleźć ten obraz. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do tego obrazu w punkcie $(-1, 0, 0)$.

3. Niech $\mathbb{T} = \{\phi(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$, gdzie $\phi(x_1, x_2) = \Big((2 + \cos x_1)\cos x_2, (2 + \cos x_1)\sin x_2, \sin x_2\Big)$. Wykazać, że torus $\mathbb{T}$ jest dwuwymiarową rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do $\mathbb{T}$ w punkcie $(3, 0, 0)$.

4. Niech $\mathbb{T}_0 = \{\phi(x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$, gdzie $\phi(x_1, x_2) = \Big(\cos x_1, \sin x_1, \cos x_2, \sin x_2\Big)$. Wykazać, że $\mathbb{T}_0$ jest dwuwymiarową rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do $\mathbb{T}_0$ w punkcie $(1, 0, 1, 0)$.

Zadanie 22. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji f na $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x, y) = x^2y(4 - x + y)$,
2. $f(x, y) = 6xy - x^3 - y^3$,
3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy + 2a^2$ (a – parametr),
4. $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$,
5. $f(x, y) = xy\ln\sqrt{x^2 + y^2}$,
6. $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

Zadanie 23. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji f na zbiorze S, gdzie:

1. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}$, $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$;
2. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$;
3. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4x^2 + y^2 = 25\}$, $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$;
4. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ :\ x + 2y + 3z = 1\}$, $f(x, y, z) = xy^2z^3$;
5. $S = \{x \in \mathbb{R}^n_: x_1 + x_2 + ... + x_n = a\}$ $(a > 0)$, $f(x) = x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p$ $(p > 1)$.

Zadanie 24. (Twierdzenie o funkcji uwikłanej)

1. Wykazać, że układ równań
$$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 2 \end{cases}$$
określa w otoczeniu punktu $x_0 = y_0 = u_0 = v_0 = 1$ funkcje $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Policzyć różniczki $Du(x_0, y_0)$, $Dv(x_0, y_0)$.
2. Znaleźć $\frac{dy}{dx}$ jeśli $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
3. Znaleźć $\frac{dy}{dx}$ dla $(x, y) = (0, 0)$, jeśli $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$.
4. Znaleźć dz jeśli $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$.
5. Znaleźć du jeśli $u^3 - 3(x + y)u^2 + z^3 = 0$.
6. Znaleźć $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ jeśli $f(x - y, y - z, z - x) = 0$.

Zadanie 25. Obliczyć $y'(x)$, gdzie $y(x)$ jest określone równaniem:

1. $y - \sin y + x^2 = 0$;

2. $y^2 - \operatorname{arc\,tg} y - e^x = 0$.

Zadanie 26. Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach A tych krzywych:

1. $x + x^3 = y^3 + y^5$, $A = (1, 1)$;
2. $2 + x^3 + y^3 = e^x + e^y$, $A = (0, 0)$.

Zadanie 27. Przedstawić $\iint\limits_A f(x, y)\, dxdy$ w postaci całek iterowanych, jeśli zbiór A ograniczony jest krzywymi:

1. $x^2 + y = 2$, $y^3 = x^2$;
2. $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ $(x, y \geqslant 0)$;
3. $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 3$ $(x < 0)$.

Zadanie 28. Obliczyć miarę zbioru A ograniczonego:

1. krzywymi $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $y = 0$ $(y \geqslant 0)$;
2. krzywymi $x + y = 4$, $x + y = 8$, $x - 3y = 0$, $x - 3y = 5$;
3. krzywymi $xy = 4$ i $|x + y| = 5$;
4. powierzchniami $x = -1$, $x = 2$, $z = 4 - y^2$, $z = 2 + y^2$;
5. powierzchniami $z = x^3 + y^3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

Zadanie 29. Zmienić porządek całkowania w całkach iterowanych:

1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\, dy$;
2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x, y)\, dy$;
3. $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x, y)\, dy$;
4. $\int\limits_{-1}^1 \left(\int\limits_0^{|x|} f(x, y)\, dy \right) dx$;
5. $\int\limits_0^4 \left(\int\limits_{\sqrt{4x - x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y)\, dy \right) dx$;
6. $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2-2x} \left(\int\limits_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$.

Zadanie 30. Obliczyć całki iterowane:

1. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_1^{\sqrt{x}} \frac{y}{x}\, dy$;
2. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2 \sin^2 \varphi\, dr$.

Zadanie 31. Obliczyć podane całki podwójne i potrójne:

1. $\iint\limits_P y e^{xy}\, dx\, dy$, gdzie $P = [-1, 1] \times [0, 1]$;

2. $\iint\limits_P x\sin^2 xy\,dx\,dy$, gdzie $P=[0,2]\times[0,\pi]$;

3. $\iint\limits_T (4-x-y)\,dx\,dy$, gdzie T jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,3)$;

4. $\iint\limits_D \frac{x}{y}\,dx\,dy$, gdzie $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 2\leqslant x\leqslant 4,\ 1\leqslant y\leqslant x^2\}$;

5. $\iint\limits_T (5x^2-2xy)\,dx\,dy$, gdzie T jest trójkątem ograniczonym prostą $x+2y=2$ i osiami współrzędnych.

6. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, gdzie $D=[0,2]\times[0,1]$;

7. $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x}y^2+4x^4}{xy}\,dxdy$, gdzie $D=[1,9]\times[2,3]$;

8. $\iint\limits_D [x+y]\,dxdy$, gdzie $D=[0,2]\times[0,2]$;

9. $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dxdy$, gdzie $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 4\}$;

10. $\iiint\limits_P xz\sin(xy)\,dxdydz$, gdzie $P=[\frac{1}{6},\frac{1}{2}]\times[0,\pi]\times[0,1]$;

11. $\iiint\limits_P \sin(x+y+z)\,dxdydz$, gdzie $P=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]$;

12. $\iiint\limits_P e^{x+y+z}\,dxdydz$, gdzie $P:\ x\leqslant 0,\ -x\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant -x$;

13. $\iiint\limits_P x^2+y^2\,dxdydz$, gdzie $P:\ x^2+y^2\leqslant 4,\ 1-x\leqslant z\leqslant 2-x$.