Dodatkowe zadania przygotowawcze do egzaminu z analizy wektorowej dla studentów zaocznych

Zadanie 32. Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych obliczyć podane całki:

1. $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $2x+y=2$, $2x+y=3$, $x-y=-1$, $x-y=1$;

2. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $xy=1$, $xy=2$, $y=x^2$, $y=3x^2$.

Zadanie 33. Dokonując zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe r i φ obliczyć całki:

1. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$;

2. $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywą $x^2+y^2=2$;

3. $\iint\limits_D y\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=1$, $y=x$, $y=0$, $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$;

4. $\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi: $x^2+y^2=4$, $x=0$, $y=1$, $(x\leqslant 0,\ y\geqslant 1)$.

Zadanie 34. Dokonując zamiany zmiennych na współrzędne walcowe φ, r i h obliczyć podane całki po obszarach ograniczonych wskazanymi powierzchniami:

1. $\iiint\limits_U x^2\,dxdydz$, gdzie U: $z=9-x^2-y^2$, $z=0$;

2. $\iiint\limits_U (x^2+y^2)\,dxdydz$, gdzie U: $z=2\sqrt{x^2+y^2}$, $z=8$;

3. $\iiint\limits_U z^2\,dxdydz$, gdzie U: $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Zadanie 35. Dokonując zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne φ, ψ i r obliczyć podane całki po obszarach ograniczonych wskazanymi powierzchniami:

1. $\iiint\limits_U z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, gdzie U: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=0$;

2. $\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, gdzie U: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=\frac{1}{2}$;

3. $\iiint\limits_U (x^2+y^2)\,dxdydz$, gdzie U: $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Zadanie 36. Sprawdzić, że wartość całki krzywoliniowej niezorientowanej nie zależy od parametryzacji na przykładzie całki $\int\limits_\gamma x^2y\,ds$, jeśli γ jest krzywą opisaną równaniami:

1. $x(t)=2\cos(-t)$, $y(t)=2\sin(-t)$, gdzie $t\in[\frac{3\pi}{2},2\pi]$;

2. $x(t)=t$, $y(t)=\sqrt{4-t^2}$, gdzie $t\in[0,2]$.

Zadanie 37. Obliczyć podane całki krzywoliniowe niezorientowane po wskazanych krzywych:

1. $\int\limits_\gamma xy\,ds$, gdzie γ — brzeg kwadratu $|x|+|y|\leqslant 1$;

2. $\int\limits_\gamma \frac{xy}{z}\,ds$, gdzie γ — odcinek łączący punkty $(1,1,1)$ i $(2,3,4)$.

Zadanie 38. Obliczyć podane całki krzywoliniowe zorientowane z pola wektorowego F po krzywej γ dla

1. $F(x,y) = (y, -x^2)$, γ — krzywa $x(t) = t$, $y(t) = \frac{1}{2}t^2$, gdzie $t \in [0,2]$;
2. $F(x,y) = (x+y, x-y)$, γ — krzywa $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 4\sin t$, gdzie $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Zadanie 39. Sprawdzić, że podane całki krzywoliniowe zorientowane nie zależą od kształtu krzywej całkowania i następnie obliczyć je:

1. $\int\limits_\gamma 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy$, γ — krzywa o początku $A = (-2,2)$ i końcu $B = (-1,0)$;
2. $\int\limits_\gamma y\sin x\,dx - \cos x\,dy$, γ — krzywa o początku $A = (0,1)$ i końcu $B = (\pi, -1)$.

Zadanie 40. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć podane całki krzywoliniowe zorientowane po krzywych dodatnio zorientowanych względem swego wnętrza:

1. $\oint\limits_\gamma (1-x^2)y\,dx + x(1+y^2)\,dy$, γ — okrąg $x^2+y^2=1$;
2. $\oint\limits_\gamma (x^2+y)\,dx + (x+y^2)\,dy$, γ — brzeg trójkąta o wierzchołkach $A = (1,1)$, $B = (3,2)$, $C = (2,5)$ zorientowanym dodatnio.