Ćwiczenia z analizy wektorowej dla studentów zaocznych. Zestaw II

Zadanie 17. Obliczyć drugie pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x,y) = x^y$ dla $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$;
2. $u(x,y,z) = f(x+y, \sin(x+z))$, gdzie f jest funkcją klasy C^2 na $\mathbb{R}^2$.

Zadanie 18. Niech $f(x,y) = xe^{xy^2}$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Wykazać, że f jest dwukrotnie różniczkowalna oraz znaleźć $D^2 f(1,1)hh'$.

Zadanie 19. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna. Wykazać, że $g(t) = f(\cos t, \sin t)$ jest również dwukrotnie różniczkowalna oraz znaleźć jej drugą pochodną.

Zadanie 20. Policzyć $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ jeśli $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Zadanie 21. Znaleźć n-te pochodne cząstkowe funkcji f oraz $d^3 f(x,y)hh'h''$, gdzie

1. $f(x,y) = e^{2x+3y}$,
2. $f(x,y) = xye^{x+y}$.

Zadanie 22. Znaleźć wszystkie funkcje p-krotnie różniczkowalnie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takie, że $d^p f(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 23. Rozwinąć funkcję $f(x,y) = x^y$ względem punktu $(e,1)$ do pochodnych rzędu dwa.

Zadanie 24. Rozwinąć funkcję $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ w szereg Taylora względem punktu $(1,-2)$.

Zadanie 25. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje:

1. $f(x,y) = e^{4x-5y}$,
2. $f(x,y) = e^x \sin y$,
3. $f(x,y) = \ln(1+x)\ln(1+y)$.

Zadanie 26. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$f(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha). \tag{1}$$

Znaleźć $D_1 f$, $D_2 f$, $\operatorname{matr} df$ i Jf.

Zadanie 27. Na co funkcja f dana przez (1) przeprowadza proste $r = \text{const}$ i $\alpha = \text{const}$?

Zadanie 28. Niech $G = \{(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \colon r > 0\}$. Korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej wykaż, że funkcja f zadana przez (1) jest lokalnie różnowartościowa. Czy jest różnowartościowa na całym G?

Zadanie 29. Niech $G_0 = \{(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \colon r > 0,\ -\pi < \alpha < \pi\}$. Wykaż, że f zadane przez (1) jest różnowartościowe na G_0. Co to jest $f(G_0)$? Korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej wykaż, że funkcja $g = f^{-1}$ jest klasy C^1 oraz znajdź $\operatorname{matr} dg$.

Zadanie 30. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$f(x,y) = (e^x\cos y, e^x \sin y). \tag{2}$$

Jaki jest obraz f? Pokazać, że $Jf(x,y) \neq 0$ dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ale f nie jest różnowartościowa.

Zadanie 31. Niech f zadane przez (2), $a = (0, \frac{\pi}{3})$, $b = f(a)$, zaś g — funkcja odwrotna do f określona w otoczeniu b i taka, że $g(b) = a$. Znaleźć jawną postać g. Obliczyć $df(a)$, $dg(b)$ i sprawdzić, czy $\operatorname{matr} df(a) = [\operatorname{matr} dg(b)]^{-1}$.