Ćwiczenia z analizy wektorowej dla studentów zaocznych.
Zestaw III

Zadanie 33. Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^2$ na obszar $G \subset \mathbb{R}^2$ i narysować ten obszar jeśli:

1. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 < y < 2x^2,\ 1 < xy < 2\}$;
2. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1\} \setminus \{(x, 0) \colon x \leqslant 0\}$, $a, b > 0$.

Zadanie 34. Wykazać, że odwzorowanie $\Phi(r, \alpha, \beta) = (r \cos\beta \cos\alpha, r \cos\beta \sin\alpha, r \sin\beta)$ jest dyfeomorfizmem przedziału $P = \{(r, \alpha, \beta) : \ r > 0,\ -\pi < \alpha < \pi,\ -\pi/2 < \beta < \pi/2\}$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : \ x \leqslant 0\}$.

Zadanie 35. Znaleźć macierz różniczki dyfeomorfizmu odwrotnego względem dyfeomorfizmu sferycznego Φ z poprzedniego zadania.

Zadanie 36. Zbadać, czy odwzorowanie $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ jest dyfeomorfizmem i czy jego przeciwdziedzina jest łukiem otwartym, jeśli:

1. $\varphi(t) = (t^3, t^6)$, $t \in \mathbb{R}$;
2. $\varphi(t) = (t, \sqrt[3]{t})$, $t \in \mathbb{R}$;
3. $\varphi(t) = (t^2, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 37. Wykazać, że odwzorowanie $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ jest dyfeomorfizmem. Jak wygląda jego przeciwdziedzina $\varphi(\mathbb{R})$?

Zadanie 38. Zbadaj, czy zbiór S jest rozmaitością, jeśli:

1. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;
2. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = |x|\}$;
3. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| = |x|\}$;
4. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| = x^2\}$.

Zadanie 39. Wykazać, że $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ jest rozmaitością. Znaleźć przestrzeń styczną i powierzchnię styczną do S w $(x_0, y_0) \in S$ gdzie $x_0 \neq -1$.

Zadanie 40. Wykazać, że odwzorowanie $\varphi(r, \alpha) = (r \cos\alpha, r \sin\alpha, \alpha)$ określone dla $(r, \alpha) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ jest dyfeomorfizmem, czyli $\varphi((0, +\infty) \times \mathbb{R}) = S$ jest płatem 2-wymiarowym (zwanym powierzchnią śrubową). Znaleźć przestrzeń styczną i powierzchnię styczną do S w punkcie $(1, 0, 0)$.

Zadanie 41. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y$,
2. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$,
3. $f(x, y) = xy + e^{-x^2 - y^2}$.

Zadanie 42. Znaleźć ekstrema funkcji f na zbiorze S, gdzie:

1. $S = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 1\}$, $f(x) = x_1 \cdots x_m$.
2. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$.
3. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ $(a > b > c > 0)$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
4. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ \colon x^2 + y^2 = 2,\ y + z = 2\}$, $f(x, y, z) = xy + yz$.