

Ćwiczenia z analizy wektorowej dla studentów zaocznych.

Zestaw IV

Zadanie 43. Oblicz całki iterowane:

1. $\int_1^2 dx \int_0^3 (x + y^2 x) dy$;
2. $\int_0^3 dy \int_1^2 (x + y^2 x) dx$.

Zadanie 44. Oblicz całki podwójne:

1. $\iint_R e^{x+y} dx dy$, gdzie $R = [0, 1] \times [0, 1]$;
2. $\iint_R \sin(x + y) dx dy$, gdzie $R = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$.

Zadanie 45. Przedstawić $\iint_D f(x, y) dx dy$ w postaci całki iterowanej jeśli zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ograniczony jest krzywymi:

1. $x^2 y^4 = 1$;
2. $y = x^2, y = \sqrt{x}$;
3. $y = 0, x = 2, y = x^2$;
4. $y = \frac{1}{x}, y = x, y = 2x (x > 0)$;
5. $x^2 + y^2 = 1$;
6. $y = x^2, y = -x + 2, y = 0, x = \frac{2}{3}$.

Zadanie 46. Obliczyć miarę zbioru:

1. $A = \{(x, y) : \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\}$;
2. $B = \{(x, y, z) : -1 < x < 1, -1 < y < 1, 0 < z < x^2 + y^2\}$.

Zadanie 47. Zamienić kolejność całkowania w całkach iterowanych:

1. $\int_0^4 (\int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy) dx$;
2. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz dy dx$.

Zadanie 48. Oblicz podane całki:

1. $\iint_D (x^2 - xy) dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) : y \geq x, y \leq 3x - x^2\}$;
2. $\iint_D y dx dy$, gdzie $D = \{(x, y) : x \leq \arcsin y, y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, x \geq 0\}$;
3. $\iint_D x + y dx dy$, gdzie D jest ograniczony krzywymi $y = \sqrt{|x|}, 2y = |x|$ i $|x| = 1$;
4. $\iint_D \operatorname{sgn}(y - x^2) dx dy$, gdzie $D = [0, 2] \times [0, 2]$;
5. $\iint_D \frac{xy dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$, gdzie $D = [0, 1] \times [0, 1]$;
6. $\iiint_P \ln x^{yz} dx dy dz$, gdzie $P = [1, e] \times [1, 2] \times [2, 3]$;
7. $\iiint_P xyz dx dy dz$, gdzie $P = \{(x, y, z) : y \geq x^2, x \geq y^2, 0 \leq z \leq xy\}$;
8. $\iiint_P \cos \frac{z}{y} dx dy dz$, gdzie P jest ograniczony krzywymi $y = \frac{\pi}{6}, y = x, x = \frac{\pi}{2}, z = xy$ i $z = 0$.

Zadanie 49 . Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych obliczyć całki

1. $\iint_D xy \, dx \, dy$, gdzie $D = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 3\}$;
2. $\iint_D (x + y) \, dx \, dy$, gdzie D jest ograniczony krzywymi: $2x + y = 2$, $2x + y = 3$, $x - y = -1$,
 $x - y = 1$.

Zadanie 50. Zamieniając na współrzędne biegunowe oblicz podane całki:

1. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$ (wskazówka: oblicz najpierw $I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy$);
2. $\iint_D y \, dx \, dy$, gdzie $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;
3. $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$, gdzie D jest ograniczony krzywymi $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 1$ ($x \leq 0$, $y \geq 1$).

Zadanie 51. Zamieniając na współrzędne sferyczne oblicz podane całki:

1. $\iiint_U z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym powierzchniami
 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = 0$;
2. $\iiint_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym powierzchnią
 $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$.

Zadanie 52. Zamieniając na współrzędne walcowe oblicz podane całki:

1. $\iiint_U x^2 \, dx \, dy \, dz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym powierzchniami $z = 9 - x^2 - y^2$,
 $z = 0$;
2. $\iiint_U z^2 \, dx \, dy \, dz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym powierzchniami $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$,
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$