Zadania domowe z analizy wektorowej dla studentów zaocznych.
Zestaw I

Zadanie 1. (po 1 pkt) Dla danego zbioru A znaleźć: zbiór punktów skupienia, zbiór punktów izolowanych, wnętrze $\operatorname{Int} A$, domknięcie $\overline{A}$ i brzeg ∂A. Czy zbiór A jest otwarty/domknięty? Narysować zbiór A w układzie współrzędnych.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x < 1, \ -1 < y < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$,
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2\}$,
3. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1\}$,
4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\} \cup [-2, 2] \times \{0\}$,
5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|\}$.

Zadanie 2. (po 1 pkt) Zbadać zbieżność ciągów i dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice.

1. $(x_n, y_n) = (\log_{2n+3} 3, \frac{-3}{n})$,
2. $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{3^n}, \left(\frac{3}{4}\right)^{3n}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right)$.

Zadanie 3. (po 1 pkt) Zbadać istnienie granic:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to\infty}(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}))$ $\quad\lim\limits_{y\to\infty}(\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}))$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}}(\frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy})$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}(y + x\sin(\frac{1}{y})))$ $\quad\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0}(y + x\sin(\frac{1}{y})))$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(y + x\sin(\frac{1}{y}))$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\lim\limits_{y\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2})$ $\quad\lim\limits_{y\to\infty}(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2})$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2})$ $\quad\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2})$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2})$ $\quad\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2})$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|})$ $\quad\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|})$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{|x|+|y|}$

Zadanie 4. (po 1 pkt) Znajdź granice funkcji:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$.
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$.
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$.
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,a)} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Zadanie 5. (po 1 pkt) Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x, y, z) = x^{yz}$ dla $x > 0$.

Zadanie 6. (po 1 pkt) Znaleźć pochodne kierunkowe funkcji:

1. $f(x,y) = e^{x^2y}\sin(3xy)$ w kierunku wektora $v = (-1,1)$.

Zadanie 7. (po 2 pkt) Zbadać w jakich punktach jest różniczkowalna funkcja f oraz znaleźć Df, gdy:

1. $f(x,y) = |x-y|$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 8. (po 2 pkt) Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji:

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zadanie 9. (po 2 pkt) Zbadać, czy funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1, gdzie:

1. $f(x,y) = x\cos\sqrt{x^2+y^2}$.

Zadanie 10. (po 1 pkt) Policzyć $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ dla:

1. $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$
2. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
3. $u(x,y) = f(x, \frac{x}{y})$, gdzie f — funkcja różniczkowalna.

Zadanie 11. (po 1 pkt) Niech f — funkcja różniczkowalna. Wykazać ,że:

1. $u(x,y) = yf(x^2-y^2)$ spełnia $y^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = xu$.
2. $u(x,y) = f(x^2+y^2)$ spełnia $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.
3. $u(x,y) = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$ spełnia $x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$.