Zadania domowe z analizy wektorowej dla studentów zaocznych.
Zestaw II

Zadanie 12. (po 1 pkt)
Obliczyć drugie pochodne cząstkowe funkcji:

1. $f(x,y) = \ln(x+y^2)$,
2. $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$,
3. $f(x,y) = x\sin(x+y)$,

Zadanie 13. (po 2 pkt)
Niech f – funkcja dwukrotnie różniczkowalna. Znaleźć pochodne czątkowe drugiego rzędu:

1. $u(x,y,z) = f(x^2+y^2+z^2)$,
2. $u(x,y) = f(x+y, xy)$,

Zadanie 14. (po 2 pkt)
Znaleźć Δu, jeśli:

1. $u(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$,
2. $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Zadanie 15. (po 2 pkt)
Niech ϕ, ψ – funkcje dwukrotnie różniczkowalne. Wykazać, że:

1. $u(t,x) = \phi(x-at)+\psi(x+at)$ spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Zadanie 16. (po 1 pkt)
Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji f:

1. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ jeśli $f(x,y) = x\ln(xy)$,
2. $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ jeśli $f(x,y,z) = e^{xyz}$,
3. $\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$ jeśli $f(x,y) = (x-a)^p(y-b)^q$,
4. $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ jeśli $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x+y}$.

Zadanie 17. (po 2 pkt)
Znaleźć różniczkę $d^3 f(x,y)hh'h''$ dla:

1. $f(x,y) = x^3+y^3-3xy(x-y)$,
2. $f(x,y) = \ln(x+y)$,

Zadanie 18. (po 2 pkt)
Napisać wzór Taylora względem punktu $(1,1)$ dla funkcji
$f(x,y) = x^3+y^3+xy^2-3xy$.

Zadanie 19. (po 2 pkt)
Napisać wzór Taylora do pochodnych rzędu 2 względem punktu $(0,0)$ dla funkcji $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Zadanie 20. (po 2 pkt)
Rozwinąć w szereg Taylora względem punktu $(1,1)$ funkcję $f(x,y)=\frac{x}{y}$.

Zadanie 21. (po 2 pkt)
Rozwinąć w szereg MacLaurina funkcję f:

1. $f(x,y)=\ln(1+2x+3y)$,
2. $f(x,y)=e^{3x}\cos(5y)$.

Zadanie 22. (po 4 pkt)

1. Niech $\phi(u,v)=\Big(u+v\cos u, e^{2u}(v+1)\Big)$. Wykazać, ze istnieje otoczenie U punktu $(0,0)$, takie, że $\phi_{|U}$ jest dyfeomorfizmem na obraz. Obliczyć pochodną $(\phi_{|U})^{-1}$ w punkcie $(0,1)$.