Zadania domowe z analizy wektorowej dla studentów zaocznych.
Zestaw III

Zadanie 23. (2 pkt)
Niech $\phi(u,v) = (e^{u+v} + e^{u-v}, e^{u+v} - e^{u-v})$ dla $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Znaleźć $\phi(\mathbb{R}^2)$ oraz zbadać, czy ϕ jest dyfeomorfizmem.

Zadanie 24. (po 2 pkt)
Znaleźć dyfeomorfizm pewnego przedziału otwartego $P \subset \mathbb{R}^2$ na obszar $G \subset \mathbb{R}^2$, narysować ten obszar:
a) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 < x < 2y^2,\ 2x^2 < y < 3x^2\}$;
b) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x,\ 0 < y < x^2\}$;
c) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < x^2 + y^2 < 4,\ 0 < x < y < 2x\}$.

Zadanie 25. (1 pkt)
Przypomnijmy, że $\phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ jest dyfeomorfizmem $\mathbb{R}$ na obraz $\phi(\mathbb{R})$ (zwany linią śrubową). Znaleźć przestrzeń styczną i prostą styczną do linii śrubowej w punkcie $(1,0,0)$.

Zadanie 26. (3 pkt)
Niech $\phi\colon (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$, $\phi(\alpha,\beta) = (\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\cos\beta, \sin\beta)$. Wykazać, że ϕ jest dyfeomorfizmem $(0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na obraz. Znaleźć ten obraz. Znaleźć przestrzeń styczną i płaszczyznę styczną do tego obrazu w punkcie $(-1,0,0)$.

Zadanie 27. (po 2 pkt)
Znaleźć ekstrema lokalne funkcji f na $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x,y) = x^2y(4 - x + y)$;
2. $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$;
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy + 2a^2$ (a – parametr).

Zadanie 28. (po 3 pkt)
Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji f na zbiorze S, gdzie:

1. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}$, $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$;
2. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$;
3. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4x^2 + y^2 = 25\}$, $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$.