Analiza wektorowa dla studentów zaocznych

Wykład I
Przestrzeń euklidesowa, nierówność Schwarza, zbieżność ciągów

Sławomir Michalik

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie
www.impan.pl/~slawek/awz3

9 października 2022

Literatura:

1. A. B i r k h o l c, *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 2012.
2. W. R u d i n, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2012.
3. M. S p i v a k, *Analiza na rozmaitościach*, PWN, Warszawa 2005.
4. K. M a u r i n, *Analiza. Część I*, PWN, Warszawa 2010.
5. W. K o ł o d z i e j, *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa 2009.
6. R. R u d n i c k i, *Wykłady z analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2002.

Przestrzenie euklidesowe

Definicja

Dla każdej liczby naturalnej n oznaczmy przez $\mathbb{R}^n$ zbiór wszystkich uporządkowanych ciągów składających się z n liczb rzeczywistych $x = (x_1, ..., x_n)$.

Liczby $x_1, ...x_n$ nazywamy współrzędnymi elementu x.

Elementy zbioru $\mathbb{R}^n$ nazywamy wektorami (lub punktami).

Definicja

Dla $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ określamy działania:

- dodawania: $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$
- mnożenia przez skalar: $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Zbiór $\mathbb{R}^n$ z takimi działaniami nazywamy przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$.

Elementem zerowym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy punkt $0 = (0, 0, ..., 0)$.

Przestrzenie euklidesowe

Definicja

W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wprowadźmy iloczyn skalarny wektorów $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

oraz odwzorowanie $\| \cdot \| \colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ zdefiniowane jako

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Uwaga

1. Iloczyn skalarny mierzy prostopadłość wektorów, tzn. dwa wektory x i y są prostopadłe wtedy i tylko wtedy gdy $x \cdot y = 0$.
2. Odwzorowanie $\| \cdot \|$ mierzy długość wektorów, tzn $\|x\|$ jest długością wektora x.

Przestrzenie euklidesowe

Twierdzenie (Twierdzenie 1, Nierówność Schwarza)

Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}^n$ *to*

$$|x \cdot y| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Innymi słowy

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big).$$

Przestrzenie euklidesowe

Dowód.

Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność: $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i t - y_i)^2 \geqslant 0$.

Zatem trójmian kwadratowy

$$f(t) = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)t^2 - 2(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)t + (\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$$

jest nieujemny i $\Delta \leqslant 0$.

Oznacza to, że $\Delta = 4(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i)^2 - 4(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2) \leqslant 0$.

Stąd wynika nierówność Schwarza. $\square$

Przestrzenie euklidesowe

Wniosek

Odwzorowanie $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ zdefiniowane wzorem $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ jest normą w $\mathbb{R}^n$.

Oznacza to, że dla każdego $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ spełnione są warunki:

1. $\|x\| \geqslant 0$ i $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Przestrzenie euklidesowe

Dowód.

Wystarczy wykazać, że zachodzą warunki (1)–(3):

1. $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \geqslant 0$. Ponadto $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = 0 \iff \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff$ $x_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, n \iff x = 0$.
2. $\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y \overset{\text{Nierówność Schwarza}}{\leqslant}$ $\|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.
3. $\|\alpha x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha x_i)^2} = \sqrt{\alpha^2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = |\alpha|\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = |\alpha|\cdot\|x\|$.

$\square$

Przestrzenie euklidesowe

Definicja

Przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym $x \cdot y$ i normą $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ nazywamy *n*-wymiarową przestrzenią euklidesową, a odwzorowanie $\| \cdot \|$ nazywamy normą euklidesową.

Uwaga

Norma euklidesowa $\| \cdot \|$, jak każda norma, zadaje metrykę $d(x, y) := \|x - y\|$, czyli funkcję $d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}_+$ spełniającą dla każdego $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ warunki:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Oznacza to, że przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią metryczną.

Granica i ciągłość

Definicja

Kulą otwartą o promieniu r i środku x w $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\},$$

a kulą domkniętą zbiór

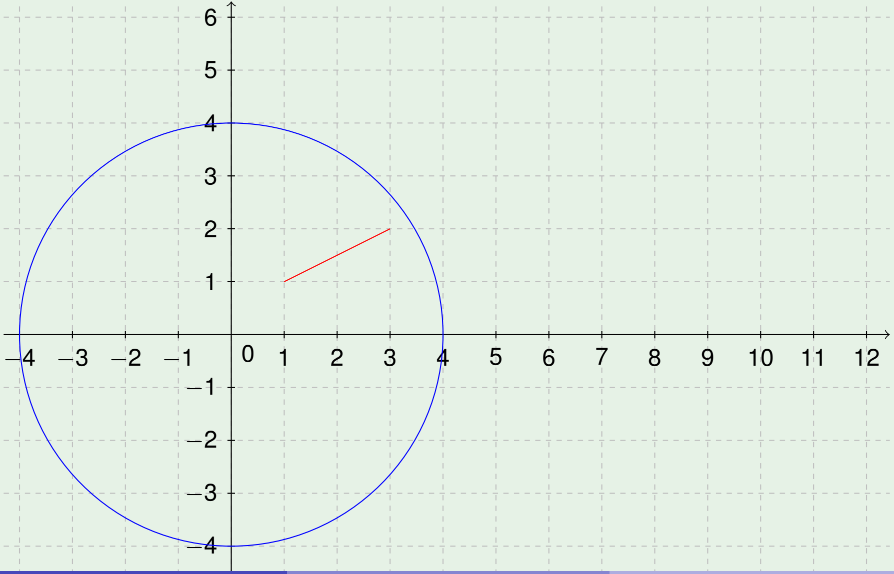
$$\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leqslant r\}.$$

Definicja

Mówimy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest ograniczony, jeśli istnieje $R > 0$ takie, że $A \subseteq B(0,R)$, w przeciwnym wypadku zbiór A nazywamy nieograniczonym.

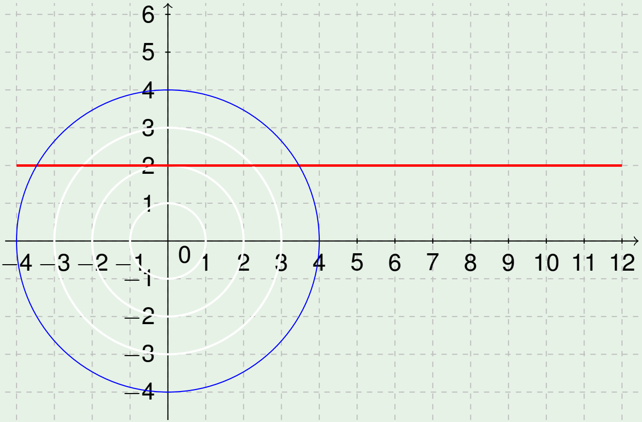
Granica i ciągłość

Przykład



Granica i ciągłość

Przykład



Granica i ciągłość

Definicja

Mówimy, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest otwarty, jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje $r > 0$ takie, że $B(x, r) \subseteq A$.

Mówimy, że zbiór $B \subseteq \mathbb{R}^n$ jest domknięty, jeśli $\mathbb{R}^n \setminus B$ jest otwarty.

Definicja

Niech $E \subset \mathbb{R}^n$. Wnętrzem E (oznaczenie: $\mathrm{Int}\, E$) nazywamy największy zbiór otwarty zawarty w E.

Domknięciem E (oznaczenie: $\overline{E}$) nazywamy najmniejszy zbiór domknięty zawierający E.

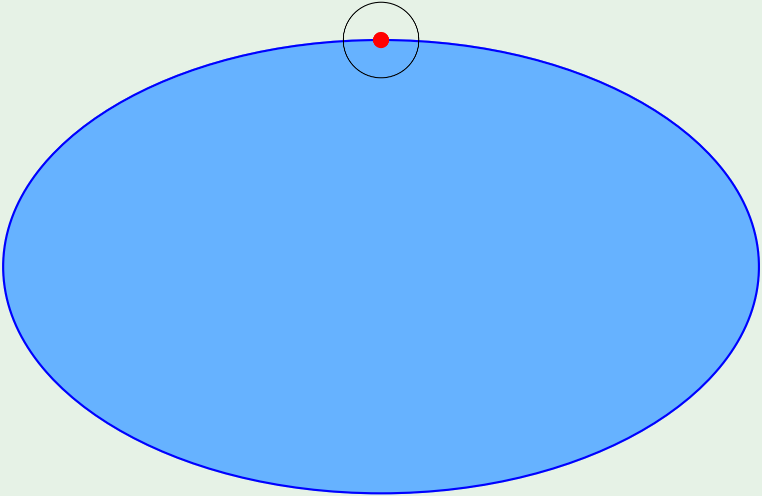
Brzegiem E (oznaczenie: ∂E) nazywamy zbiór $\overline{E} \setminus \mathrm{Int}\, E$.

Granica i ciągłość

Przykład

Granica i ciągłość

Przykład



Granica i ciągłość

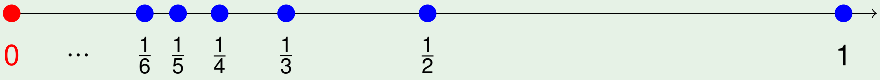
Definicja

Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **punktem skupienia** zbioru $E \subseteq \mathbb{R}^n$, jeśli dla każdego $r > 0$ zachodzi warunek $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing$.

Punkt $x \in E$ nazywamy **punktem izolowanym** zbioru E, jeśli x nie jest punktem skupienia E.

Przykład

Niech $E = \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$. Wówczas każdy punkt zbioru E jest punktem izolowanym E, zaś 0 jest jedynym punktem skupienia E.



Granica i ciągłość

Po zastąpieniu odległości w $\mathbb{R}$ (czyli $|x-y|$) przez odległość w $\mathbb{R}^n$ (czyli $\|x-y\|$) pojęcie granicy przenosi się na $\mathbb{R}^n$. Dokładniej:

Definicja (Zbieżność ciągu)

Mówimy, że ciąg (x_k), $x_k \in \mathbb{R}^n$, jest zbieżny do $x_0 \in \mathbb{R}^n$, co oznaczamy $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, jeśli $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| = 0$.

Stwierdzenie

Jeśli $x_k = (x_{1k}, ..., x_{nk})$ i $x_0 = (x_{10}, ..., x_{n0})$, to

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \lim_{k\to\infty} x_{1k} = x_{10}, ..., \lim_{k\to\infty} x_{nk} = x_{n0}$$

(czyli ciąg x_k zbiega do x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy zbiega po wszystkich swoich współrzędnych).

Granica i ciągłość

Dowód.

$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \iff \lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\| = 0 \iff$
$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{ik} - x_{i0})^2} = 0 \iff \lim_{k\to\infty} |x_{ik} - x_{i0}| = 0$ dla $i = 1, ..., n$
$\iff \lim_{k\to\infty} x_{ik} = x_{i0}$ dla $i = 1, ..., n$. $\square$

Przykład

Niech $x_k = (\frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k^2}, \sqrt[k]{10})$. Wówczas

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k^2}, \sqrt[k]{10})$$
$$= (\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}, \lim_{k\to\infty} 2 - \frac{1}{k^2}, \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{10}) = (0, 2, 1).$$

Koniec wykładu I

Dziękuję za uwagę!