Analiza wektorowa dla studentów zaocznych

Wykład II
Ciągłość i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

Sławomir Michalik

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

9 października 2022

Granica i ciągłość

Możemy teraz uogólnić na $\mathbb{R}^n$ pojęcie granicy i ciągłości funkcji.

Uwaga notacyjna

Przekształcenie $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będziemy nazywać funkcją, a $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ (to znaczy $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$, $f_i\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) odwzorowaniem.

Definicja (Granica odwzorowania)

Niech $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ odwzorowanie i x_0 punkt skupienia zbioru D. Wówczas mówimy, że f ma granicę w x_0 równą $y_0 \in \mathbb{R}^k$, co oznaczamy $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in D$ zachodzi implikacja

$$x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in B(y_0, \epsilon),$$

czyli równoważnie

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - y_0\| < \epsilon.$$

Granica i ciągłość

Definicja (Ciągłość w sensie Cauchy'ego)

Mówimy, że odwzorowanie $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest ciągłe w $x_0 \in D$ jeśli $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D$

$$x \in B(x_0, \delta) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in B(f(x_0), \epsilon),$$

czyli równoważnie:

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

Mówimy, że odwzorowanie f jest ciągłe na D jeśli jest ciągłe w każdym punkcie $x_0 \in D$.

Granica i ciągłość

Twierdzenie (Twierdzenie 2, Ciągłość w sensie Heinego)

Odwzorowanie $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *jest ciągłe w* $x_0 \in D$ *będącym punktem skupienia zbioru* D *wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ciągu* (x_k)*,* $x_k \in D$*,* $x_k \neq x_0$ *i* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ *zachodzi*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0).$$

Uwaga

Odwzorowanie ciągłe po każdej współrzędnej osobno nie musi być ciągłe! W szczególności z faktu, że $x \mapsto f(x, y_0)$ ciągła w x_0 i $y \mapsto f(x_0, y)$ ciągła w y_0 nie musi wynikać, że $(x, y) \mapsto f(x, y)$ ciągła w (x_0, y_0).

Granica i ciągłość

Przykład

Weźmy funkcję

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Funkcja f jest ciągła poza $(0,0)$.

W punkcie $(0,0)$ funkcja f jest ciągła po każdej zmiennej osobno, bo $x \mapsto f(x,0) \equiv 0$ ciągła w 0 i $y \mapsto f(0,y) \equiv 0$ ciągła w 0.

Natomiast f nie jest ciągła jako funkcja (x,y) w $(0,0)$, bo dla ciągu $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ zachodzi $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (0,0)$, zaś $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$.

Pochodne kierunkowe i cząstkowe

Definicja (Pochodna kierunkowa)

Niech $f\colon G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, G otwarty, $x_0 \in G$ i $v \in \mathbb{R}^n$.

Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora v nazywamy granicę:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

Oznaczamy ją: $f'_v(x_0)$, $D_v f(x_0)$ albo $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$.

Pochodne kierunkowe i cząstkowe

Uwaga

Jeśli określimy $g(t) = f(x_0 + tv)$, to istnieje $a > 0$ takie, że $g\colon (-a, a) \to \mathbb{R}$ (bo G otwarty) oraz

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = f'_v(x_0).$$

Uwaga

Istnienie pochodnej kierunkowej w x_0 (nawet we wszystkich kierunkach) nie gwarantuje ciągłości w x_0.

Pochodne kierunkowe i cząstkowe

Przykład

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Niech $v = (v_1, v_2)$. Wówczas:

1. jeśli $v_1 = 0$ to $f'_v(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,tv_2)}{t} = 0$,
2. jeśli $v_1 \neq 0$ to
$f'_v(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^3 v_1^2 + t^5 v_2^4} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \frac{v_2^2}{v_1}$.

Zatem dla każdego $v \in \mathbb{R}^2$ istnieje $f'_v(0,0)$, ale f nie jest ciągła w $(0,0)$, bo dla $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k})$ zachodzi $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (0,0)$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

Pochodne kierunkowe i cząstkowe

Definicja (Pochodna cząstkowa)

Niech $f\colon G \overset{\text{otw.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in G$. Jeśli jako wektor v przyjmiemy wektor jednostkowej bazy standardowej $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 na i-tym miejscu) to pochodną kierunkową w x_0 w kierunku e_i nazywamy pochodną cząstkowa w x_0 względem x_i i oznaczamy przez $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ lub $f'_{x_i}(x_0)$ lub $D_i f(x_0)$, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{t} = g^{'}(x_i),$$

gdzie $g\colon x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ jest funkcją jednej zmiennej.

Odwzorowania liniowe

Definicja (Odwzorowanie liniowe)

Niech X, Y będą rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi. Odwzorowanie $A\colon X \to Y$ nazywamy liniowym jeśli spełnia:

1. $A(x+y) = Ax + Ay \ \forall_{x,y \in X}$,
2. $A(cx) = cA(x) \ \forall_{c \in \mathbb{R}} \ \forall_{x \in X}$.

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych $X \to Y$ będziemy oznaczać przez $L(X, Y)$.

Uwaga

Zbiór $L(X, Y)$ tworzy też przestrzeń liniową z działaniami $(A+B)x = Ax + Bx$ oraz $(cA)x = cAx \ \forall_{x \in X} \ \forall_{c \in \mathbb{R}}$.

Odwzorowania liniowe

Przykład

Niech $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ będzie zbiorem wszystkich odwzorowań liniowych z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^k$. Można go utożsamić ze zbiorem wszystkich macierzy rzeczywistych $M(n \times k, \mathbb{R})$, to znaczy

$$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \quad \Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix}.$$

Różniczkowalność

Przypomnijmy sobie przypadek 1-wymiarowy. Jeśli $f\colon (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a,b)$ to

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Zatem $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(h)$, gdzie reszta $r(h)$ spełnia

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0,$$

czyli

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h|}{|h|} = 0.$$

Zauważmy, że liczbę $f'(x_0)$ możemy utożsamić z odwzorowaniem liniowym $L(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$.

Różniczkowalność

Definicja (Różniczka odwzorowania)

Różniczką odwzorowania $f\colon G \overset{\text{otw.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ w punkcie $x_0 \in G$ nazywamy takie odwzorowanie liniowe $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, jeśli ono istnieje, że

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|}{\|h\|} = 0.$$

Zamiast A będziemy pisać $Df(x_0)$ lub $df(x_0)$.

Odwzorowanie f nazywamy różniczkowalnym w $x_0 \in G$ jeśli istnieje jego różniczka w x_0.

Odwzorowanie f nazywamy różniczkowalnym w G jeśli jest różniczkowalne w każdym punkcie $x_0 \in G$.

Różniczkowalność

Przykład

1. Jeżeli $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest zdefniowane jako $f(x) = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}^k$ — stała, to f różniczkowalna i $Df(x) = 0\ \forall_{x\in\mathbb{R}^n}$, bo

$$\lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}^n} \frac{\|c - c - 0\|}{\|h\|} = 0.$$

2. Niech $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ będzie funkcją liniową $f(x) = Ax$, gdzie $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$. Wtedy f jest różniczkowalna i $Df(x) = A$, bo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|A(x+h) - A(x) - Ah\|}{\|h\|} = 0.$$

Różniczkowalność

Uwaga

Jeśli $f\colon G \overset{\text{otw.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ różniczkowalna w x_0, to

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + r(h),$$

gdzie reszta $r(h)$ spełnia warunek

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Zatem $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, czyli f ciągła w x_0.

Koniec wykładu II

Dziękuję za uwagę!