Analiza wektorowa dla studentów zaocznych

Wykład III

Różniczkowalność, pochodne wyższego rzędu.

Sławomir Michalik

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

5 listopada 2022

Różniczkowalność

Twierdzenie (Twierdzenie 3)

Jeśli $f\colon G \overset{otw.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *różniczkowalna w* x_0*, to:*

1. f *ma dokładnie jedną różniczkę w* x_0,

Różniczkowalność

Twierdzenie (Twierdzenie 3)

2. *dla każdego $h \in \mathbb{R}^n$ istnieje pochodna kierunkowa $\frac{df}{dh}(x_0)$ i wyraża się ona wzorem*

$$\frac{df}{dh}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dh}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{df_k}{dh}(x_0) \end{bmatrix} = Df(x_0)h,$$

3. *istnieją pochodne cząstkowe $D_j f_i(x_0)$ $(i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n)$ oraz*

$$Df(x_0)h = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} D_j f_1(x_0) h_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} D_j f_k(x_0) h_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f_1(x_0) & \cdots & D_n f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_k(x_0) & \cdots & D_n f_k(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Różniczkowalność

Uwaga

Twierdzenie mówi nam, że

$$Df(x_0) = (D_j f_i(x_0))_{i=1,\dots,k}^{j=1,\dots,n} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i=1,\dots,k}^{j=1,\dots,n}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} = \mathcal{J}_f(x_0).$$

Powyższą macierz $\mathcal{J}_f(x_0)$ nazywamy macierzą Jacobiego odwzorowania f w punkcie x_0.

Różniczkowalność

Uwaga

Rozważmy szczególne przypadki:

1. $k = n$. Jeżeli $f \colon G \overset{\text{otw.}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, to Jakobianem odwzorowania f nazywamy wyznacznik macierzy Jacobiego $J_f(x_0) = det\mathcal{J}_f(x_0)$.
2. $k = 1$. Jeżeli f jest funkcją, to macierz Jacobiego redukuje się do wektora
$$\mathcal{J}_f(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \quad \cdots \quad , \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right],$$
który nazywamy gradientem funkcji f w x_0 i oznaczamy
$$\mathrm{grad}\, f(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \quad \cdots \quad , \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right].$$

(Bez dowodu)

Funkcje różniczkowalne w sposób ciągły

Definicja

Mówimy że $f\colon G \overset{\text{otw}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w sposób ciągły na G (inaczej klasy C^1 na G), jeśli jest różniczkowalna na G i jeśli $DF\colon G \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ jest ciągłym odwzorowaniem.

Twierdzenie (Twierdzenie 4)

Niech $f\colon G \overset{otw}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Wówczas f jest różniczkowalna w sposób ciągły na G wtedy i tylko wtedy gdy istnieją wszystkie pochodne cząstkowe $D_i f_j$ i są one ciągłe ($D_i f_j\colon G \overset{otw}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$).

(Bez dowodu)

Różniczka złożenia odwzorowań

Twierdzenie (Twierdzenie 5, O pochodnej złożenia)

Niech $f\colon G_1 \overset{otw}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *różniczkowalna w punkcie* $x_0 \in G_1$, $f(G_1) \subseteq G_2$ *i* $g\colon G_2 \overset{otw}{\subseteq} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *różniczkowalna w punkcie* $f(x_0) \in G_2$.

Wtedy odwzorowanie $F(x) = g(f(x))$ *jest różniczkowalne w punkcie* x_0 *i zachodzi wzór:*

$$DF(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0),$$

gdzie

$$Dg(f(x_0)) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k), \quad Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Różniczka złożenia odwzorowań

Przykład (Reguła łańcuchowa)

Niech $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$.

Wówczas
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Pochodne cząstkowe wyższego rzędu

Definicja (Pochodne cząstkowe wyższego rzędu)

Niech $f\colon G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Załóżmy, że zbiór tych $x \in G$ dla których istnieje pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ (dla danego $j \in \{1, ..., n\}$) jest niepusty. Wówczas jeśli istnieje pochodna cząstkowa odwzorowania $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ w x_0 względem x_i ($i \in \{1, ..., n\}$) to nazywamy ją drugą pochodną cząstkową (lub pochodną cząstkową drugiego rzędu) w x_0 względem x_i i x_j, i oznaczamy przez $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_0)$, zaś przez $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ oznaczamy odwzorowanie $x \longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$.

W podobny sposób definiujemy pochodne cząstkowe wyższych rzędów:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_0), \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x_0), \quad \ldots \quad \text{itd.}$$

Różniczki wyższego rzędu

Idea:

Niech $f\colon G \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i f różniczkowalna w G. Wtedy $Df(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \forall x_0 \in G$. Zatem

$$Df\colon G \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Jeśli Df jest różniczowalna w G, to

$$D^2 f(x_0) = D(Df)(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \backsimeq L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \forall x_0 \in G.$$

Wówczas

$$D^2 f\colon G \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \backsimeq L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Postępując tak dalej otrzymujemy różniczki wyższego rzędu.

Różniczki wyższego rzędu

Definicja (indukcyjna różniczki k-tego rzędu)

Załóżmy, że:

1. $f\colon G \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ma $(k-1)$-różniczkę w x_0,
2. dla dowolnych $X_1, ..., X_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ odwzorowanie

$$x \longmapsto \omega_{X_1,....,X_{k-1}}(x) = D^{k-1}f(x)X_1 \dots X_{k-1}$$

działające z G do $\mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne w x_0.

Wtedy odwzorowanie

$$(X, X_1, ..., X_{k-1}) \longmapsto D\omega_{X_1,....,X_{k-1}}(x_0)X$$

jest k-tą różniczką odwzorowania f w punkcie x_0, którą oznaczamy $D^k f(x_0)$.

Różniczki wyższego rzędu

Zatem

$$D^k f(x_0)\colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ razy}} \to \mathbb{R}^m$$

jest odwzorowaniem k-liniowym.
Czyli $D^k f(x_0) \in L_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ — rodzina k-liniowych odwzorowań

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}^n.$$

Zauważmy, że $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \simeq L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ i ogólnie

$$\underbrace{L(\mathbb{R}^n, L(, \mathbb{R}^n, L(\dots, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \dots)}_{k \text{ razy}} \simeq L_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Odwzorowania klasy C^k

Twierdzenie (Twierdzenie 15)

Niech $f\colon G \overset{otw.}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in G$. *Odwzorowanie* f *jest* k*-krotnie różniczkowalne w* x_0 $(k \geqslant 2)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki:*

1. f *jest* $(k-1)$*-krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu* x_0
2. *wszystkie pochodne cząstkowe* $(k-1)$*-ego rzędu odwzorowania* f *są różniczkowalne w punkcie* x_0.

Wówczas

$$D^k f(x_0)h^{(1)} \dots h^{(k)} = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} h_{i_1}^{(1)} \dots h_{i_k}^{(k)} D_{i_1} \dots D_{i_k} f(x_0)$$

Odwzorowania klasy C^k

Z odpowiedniego twierdzenia rachunku różniczkowego pierwszego rzędu (Twierdzenia 4) wynika od razu następujący warunek wystarczający k-krotnej różniczkowalności:

Twierdzenie (Twierdzenie 16)

Jeśli w pewnym otoczeniu punktu x_0 istnieją ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe $k-1$ rzędu $D_{i_1}\dots D_{i_{k-1}}f(x)$ dla $i_1,\dots,i_{k-1}=1,\dots,n$ oraz istnieją w pewnym otoczeniu tego punktu wszystkie k-tego rzędu pochodne cząstkowe $D_{i_1}\dots D_{i_k}f(x)$ i są one ciągłe w x_0, to f jest k-krotnie różniczkowalna w x_0.

Definicja (Odwzorowanie klasy C^k)

Odwzorowanie $f\colon G \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nazywamy **klasy C^k** jeśli jest ono k-krotnie różniczkowalne oraz dla dowolnych $h^{(1)},\dots,h^{(k)}\in\mathbb{R}^n$ odwzorowanie $x \longmapsto D^k f(x)h^{(1)}\dots h^{(k)}$ jest ciągłe dla $x\in G$.

Koniec wykładu III

Dziękuję za uwagę!