Analiza wektorowa dla studentów zaocznych

Wykład IV

Wzór Taylora, pochodna funkcji odwrotnej, dyfeomorfizmy.

Sławomir Michalik

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

5 listopada 2022

Twierdzenie Schwarza o symetrii drugiej różniczki

Definicja (Odwzorowanie symetryczne)

Mówimy, że odwzorowanie 2-liniowe $A \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest *symetryczne* jeśli

$$A(X, Y) = A(Y, X) \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

Ogólnie mówimy, że odwzorowanie k-liniowe $A \in L_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest symetryczne jeśli dla każdej permutacji σ ciągu $\{1, \ldots, k\}$

$$A(X_1, \ldots, X_k) = A(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}).$$

Twierdzenie (Twierdzenie 17, Schwarza o symetrii drugiej różniczki)

Niech $f\colon G \overset{otw.}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Załóżmy, że istnieje druga różniczka odwzorowania* f *w* $x_0 \in G$*. Wtedy* $D^2 f(x_0)$ *jest odwzorowaniem dwuliniowym symetrycznym z* $\mathbb{R}^n$ *w* $\mathbb{R}^m$ *(tzn.* $D^2 f(x_0) \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$*).*

Twierdzenie Schwarza o symetrii drugiej różniczki

Twierdzenie Schwarza można uogólnić na k-te różniczki:

Twierdzenie (Twierdzenie 18, Schwarza o symetrii k-tej różniczki)

Jeśli $f\colon G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ma k-tą różniczką w $x_0 \in G$, to $D^k f(x_0)$ jest odwzorowaniem k-liniowym symetrycznym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$.

Wzór Taylora

Twierdzenie (Twierdzenie 22, Wzór Taylora dla funkcji)

Niech $f\colon G \overset{otw.}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkcja* k*-krotnie różniczkowalna w* G*. Weźmy odcinek* $[a,b] \subset G$ *i niech* f *ma różniczkę rzędu* $k+1$ *we wszystkich punktach* (a,b)*. Zachodzi wówczas równość*

$$f(b) = f(a) + \frac{Df(a)}{1!}(b-a) + \frac{D^2 f(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{D^k f(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{D^{k+1} f(a+\theta(b-a))}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}$$

dla pewego $\theta \in (0,1)$*.*

Wzór Taylora

Dowód.

Weźmy funkcję $\phi(t) := f(a + t(b - a))$, $t \in [0, 1]$, $\phi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Stosując wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej mamy

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!} + \frac{\phi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\phi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Zauważmy, że

$$\phi'(t) = Df(a + t(b - a))(b - a), \ ...$$

$$\phi^{(k)}(t) = D^k f(a + t(b - a))(b - a)^k,$$

a stąd wynika teza. $\square$

Wzór Taylora

Twierdzenie (Twierdzenie 23, Wzór Taylora dla odwzorowań)

Niech $f\colon G \overset{otw.}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f jest k-krotnie różniczkowalna w G. Weźmy odcinek $[a,b] \subset G$ i niech f ma pochodną rzędu $k+1$ we wszystkich punktach (a,b) i norma tej pochodnej jest nie większa niż M. Zachodzi wówczas nierówność:

$$\|f(b) - f(a) - \frac{Df(a)}{1!}(b-a) - \ldots - \frac{D^k f(a)}{k!}(b-a)^k\| \leqslant M\frac{\|b-a\|^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{1}$$

Uwaga

Jeśli K odwzorowanie k-liniowe z X w Y, to
$$|||K||| = \sup_{\|x_i\|_X = 1,\ i=1,\ldots,k} \|K(x_1,\ldots,x_k)\|_Y.$$

Twierdzenie o funkcji odwrotnej

Twierdzenie (Twierdzenie 10, o funkcji odwrotnej)

Niech $f\colon G \overset{otw.}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *klasy* C^1 *i* $Df(a)$ *jest odwracalne dla pewnego* $a \in G$. *Wówczas:*

a) *istnieją zbiory otwarte* $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ *takie, że* $a \in U$, $b = f(a) \in V$ *i* f *jest wzajemnie jednoznaczne (tzn. różnowartościowe i na) na* U *i* $V = f(U)$,

b) *jeśli* g *jest odwzorowaniem odwrotnym do* f, *zdefiniowanym na* V *wzorem* $g(f(x)) = x\ \forall_{x\in U}$, *to* g *jest klasy* C^1, *oraz*

$$Dg(y) = \{Df(g(y))\}^{-1} \quad \forall_{y\in V}.$$

Dyfeomorfizmy

Definicja (Dyfeomorfizm)

Odwzorowanie $\varphi\colon G \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nazywamy dyfeomorfizmem, jeśli:

1. φ jest klasy C^1, jest różnowartościowe i $D\varphi(a)$ jest nieosobliwa (tzn. $\dim D\varphi(a)\mathbb{R}^n = n$) dla każdego $a \in G$,
2. φ^{-1} jest ciągłe.

Mówimy wówczas, że zbiory G i $\varphi(G)$ są dyfeomorficzne.

Wnioski:

1. Jeśli φ jest dyfeomorfizmem, to $m \geqslant n$.
2. Jeśli φ jest dyfeomorfizmem, to φ jest homeomorfizmem G i $\varphi(G)$.
3. Odwzorowanie $\varphi\colon G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest dyfeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest klasy C^1, różnowartościowe i nieosobliwe ($D\varphi(a)$ nieosobliwa $\forall_{a\in G}$).

Dyfeomorfizmy

Przykład (Dyfeomorfizm biegunowy)

Niech $f\colon G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G = \{(r, \alpha)\colon r > 0, -\pi < \alpha < \pi\}$ i $f(r, \alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$.
Zauważmy, że f jest klasy C^1, różnowartościowe i nieosobliwe, bo:

$$Jf = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha = r \neq 0.$$

Zbiory G i $f(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\colon x \leqslant 0\}$ sa dyfeomorficzne.
Mamy $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$ dla $x > 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.
Oznacza to, że

$$f^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}).$$

Płat k-wymiarowy

Definicja (Płat k-wymiarowy)

Zbiór $S \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy płatem k-wymiarowym, jeśli istnieje dyfeomorfizm

$$\varphi\colon G \overset{\text{otw}}{\subseteq} \mathbb{R}^k \xrightarrow[\text{na}]{\text{1-1}} S.$$

Dyfeomorfizm φ nazywamy wówczas przedstawieniem parametrycznym płata S.
Płat 1-wymiarowy będziemy nazywali łukiem otwartym.

Uwaga

Z nieosobliwości φ wynika że $k \leqslant m$.

Płat k-wymiarowy

Przykład

1. $G \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^k$ jest płatem k-wymiarowym. Wystarczy wziąć $\varphi(x) = x$.
2. Niech f – klasy C^1 określona na $G \overset{\text{otw}}{\subseteq} \mathbb{R}^k$. Wykres funkcji f, czyli zbiór $S = \{(x, f(x)) \colon x \in G\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{k+1}$ jest płatem k-wymiarowym. Dyfeomorfizm $\varphi \colon G \xrightarrow[\text{na}]{\text{1-1}} S$ jest dany wzorem $\varphi(x) = (x, f(x))$. Jest to odwzorowanie klasy C^1, $\varphi^{-1}(x, f(x)) = x$ jest rzutowaniem na $\mathbb{R}^k$, więc jest ciągłe.
3. Niech $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(-1, 0)\}$ (okrąg bez punktu). Wówczas S jest łukiem otwartym (płatem 1-wymiarowym). Dyfeomorfizm $\varphi \colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ jest dany wzorem $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$. Zatem w tym przypadku $G = (-\pi, \pi)$, $\varphi(G) = S$, $\varphi \colon G \xrightarrow[\text{na}]{\text{1-1}} S$. Zauważmy, że $t = \phi^{-1}(x, y)$ jest argumentem głównym liczby $z = x + iy$, więc jest ciągły.

Koniec wykładu IV

Dziękuję za uwagę!