Analiza wektorowa dla studentów zaocznych

Wykład V

Rozmaitości, przestrzenie styczne, twierdzenia o watości średniej

Sławomir Michalik

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

20 listopada 2022

Rozmaitość k-wymiarowa

Definicja (Rozmaitość k-wymiarowa)

$S \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy rozmaitością k-wymiarową (klasy C^1) jeśli jest on sumą pewnej rodziny płatów k-wymiarowych będących zbiorami otwartymi względem S, tzn.

$$S = \bigcup_{j \in J} S_j, \quad \text{gdzie } S_j \text{ — płat } k\text{-wymiarowy}, \quad S_j \overset{\text{otw.}}{\subseteq} S.$$

Definicja (Mapa rozmaitości)

Mapą rozmaitości k-wymiarowej S nazywamy każdą parę (φ, G), gdzie $G \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^k$, $\varphi\colon G \xrightarrow{\text{dyfeo}} \varphi(G) \overset{\text{otw.}}{\subseteq} S$.

Rozmaitość k-wymiarowa

Definicja (Atlas rozmaitości)

Atlasem rozmaitości S nazywamy rodzinę map (φ_j, G_j) taką, że:

1. $S = \bigcup_j \varphi_j(G_j)$.
2. Jeśli (φ_1, G_1) i (φ_2, G_2) są dwiema mapami tego atlasu, to odwzorowanie

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 \colon \varphi_2^{-1}(\varphi_1(G_1) \cap \varphi_2(G_2)) \to \varphi_1^{-1}(\varphi_1(G_1) \cap \varphi_2(G_2))$$

   jest dyfeomorfizmem.

Rozmaitość k-wymiarowa

Przykład

Niech $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ i weźmy:

$$\begin{aligned} G_1 &= (-\pi, \pi), \qquad \varphi_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{dla} \quad t \in G_1 \\ G_2 &= (0, 2\pi), \qquad \varphi_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{dla} \quad t \in G_2 \end{aligned}$$

oraz

$$S_1 = \varphi_1(G_1) = S \setminus \{(-1, 0)\} \quad \text{i} \quad S_2 = \varphi_2(G_2) = S \setminus \{(1, 0)\}.$$

Wówczas $S = S_1 \cup S_2$ jest rozmaitością 1-wymiarową, zaś (φ_1, G_1), (φ_2, G_2) jest atlasem tej rozmaitości.

Wektory styczne

Definicja (Wektor styczny)

Wektor $s \in \mathbb{R}^m$ nazywamy stycznym do zbioru $S \subset \mathbb{R}^m$ w punkcie $x \in S$ jeśli istnieje ciąg $\{x_n\},\ x_n \in S$, zbieżny do x oraz ciąg liczb rzeczywistych $\{a_n\}$ taki, że

$$s = \lim_{n\to\infty} a_n(x_n - x).$$

Jeżeli dodatkowo:

- $a_n > 0$, to s jest wektorem stycznym wewnętrznie,
- $a_n < 0$, to s jest wektorem stycznym zewnętrznie.

Wektory styczne

Uwaga

Niech

- $T(x, S)$ — zbiór wszystkich wektorów stycznych,
- $T_w(x, S)$ — zbiór wektorów stycznych wewnętrznie,
- $T_z(x, S)$ – zbiór wektorów stycznych zewnętrznie.

Wówczas zachodzą relacje:

$$T(x, S) = T_w(x, S) \cup T_z(x, S) \quad \text{i} \quad T_z(x, S) = -T_w(x, S).$$

Wektory styczne

Twierdzenie (Twierdzenie 11)

Niech $S \subset \mathbb{R}^m$ będzie k-wymiarową rozmaitością oraz $x_0 \in S$. Wówczas

$$T(x_0, S) = T_w(x_0, S) = T_z(x_0, S)$$

oraz zbiory te stanowią podprzestrzeń liniową k-wymiarową przestrzeni $\mathbb{R}^m$.
Przy czym jeśli (φ, G) jest mapą rozmaitości S obejmującą punkt x_0 (tzn $x_0 \in \varphi(G)$), $x_0 = \varphi(t_0)$, to

$$T(x_0, S) = D\varphi(t_0)\mathbb{R}^k = \{D\varphi(t_0)h \colon h \in \mathbb{R}^k\}.$$

Zatem przestrzeń $T(x_0, S)$ jest rozpięta na wektorach $D_1\varphi(t_0), \ldots, D_k\varphi(t_0)$.

Wektory styczne

Przykład

Niech
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = |x|\}.$$

Pokażemy, że $T_w(0, S) = S$.

W tym celu najpierw weźmy $p \in S$. Wówczas $p = \lim_{n\to\infty} n(\frac{p}{n} - 0)$, czyli $p \in T_w(0, S)$.

Niech teraz $s \in T_w(0, S)$. Wówczas $s = \lim_{n\to\infty} a_n p_n$, gdzie $a_n \geqslant 0$ i $p_n \in S$. Ponieważ $a_n p_n \in S$ i S — domknięte, to $\lim_{n\to\infty} a_n p_n = s \in S$.

Oznacza to, że
$$T_z(0, S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -|x|\}, \; T(0, S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = |x|\}.$$

Zatem S nie jest rozmaitością.

Twierdzenia o wartości średniej i ekstrema

Twierdzenie (Twierdzenie 6, warunek konieczny istnienia ekstremum)

Niech $f\colon G \overset{otw}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ma ekstremum lokalne w punkcie $x_0 \in G$. Jeżeli f jest różniczkowalna w kierunku $v \in \mathbb{R}^n$ w punkcie x_0, to $D_v f(x_0) = 0$.

Dowód.

Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $f(x_0)$ — minimum lokalne, czyli istnieje $B(x_0, r) \subset G$ taka, że $\forall_{x \in B(x_0,r)}\ f(x) \geqslant f(x_0)$.

Rozpatrzmy funkcje $g(t) = f(x_0 + tv) \geqslant f(x_0) = g(0)\ \forall_{\|tv\|<r}$.

Ponieważ f jest różniczkowalna w kierunku v, to g różniczkowalna w zerze i ma tam z ostatniej nierówności minimum. Zatem

$$D_v f(x_0) = g'(0) = 0.$$

□

Twierdzenia o wartości średniej i ekstrema

Twierdzenie (Twierdzenie 7, o wartości średniej dla funkcji)

Niech $f\colon G \overset{otw}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Jeśli* f *jest różniczkowalna w każdym punkcie odcinka* $[a, b] \subset G$, *to istnieje taki punkt* $c \in [a, b]$, *że*

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a).$$

Dowód.

Oznaczmy $h = b - a$ i rozważmy funkcję $g(t) = f(a + th)$ dla $t \in [0, 1]$. Z Twierdzenia 5 o pochodnej funkcji złożonej mamy, że

$$g'(t) = Df(a + th)h.$$

Z twierdzenia Lagrange'a dla funkcji jednej zmiennej g istnieje $t_0 \in (0, 1)$, że $g(1) - g(0) = g'(t_0)$, czyli $f(b) - f(a) = Df(a + t_0 h)h$. Stąd dla $c = a + t_0 h$ i $h = b - a$ mamy $f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$. □

Twierdzenia o wartości średniej i ekstrema

Twierdzenie (Twierdzenie 8)

Jeżeli $f\colon G \overset{obszar}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *jest różniczkowalna oraz* $Df(x) = 0\ \forall_x \in G$*, to* f *stała.*

Dowód.

Niech $a, b \in G$. Ponieważ G — obszar, to istnieje łamana $L \subset G$ łącząca punkty a i b.
Na mocy Twierdzenia 7 funkcja f przyjmuje tę samą wartość na końcach każdego z odcinków z łamanej L. Stąd $f(b) = f(a)$. □

Twierdzenia o wartości średniej i ekstrema

Twierdzenie (Twierdzenie 9, o wartości średniej dla odwzorowań)

Jeżeli $f\colon G \overset{\text{otw., wypukły}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *jest różniczkowalne w G i istnieje stała M taka, że* $\forall_{x\in G}\ |||Df(x)||| \leqslant M$*,*
to wówczas $\forall_{a,b\in G}\ \|f(b)-f(a)\| \leqslant M\|b-a\|$*.*

Korzystając z tego twierdzenia, podobnie jak w przypadku funkcji, dostajemy:

Wniosek

Jeżeli $f\colon G \overset{\text{obszar}}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalne oraz $Df(x) = 0\ \forall_{x\in G}$, to f stała.

Koniec wykładu V

Dziękuję za uwagę!