Analiza wektorowa dla studentów zaocznych

Wykład VI

Ekstrema funkcji wielu zmiennych, twierdzenie o funkcji uwikłanej

Sławomir Michalik

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

20 listopada 2022

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Definicja (forma kwadratowa, forma m-liniowa)

Każde przekształcenie dwuliniowe $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ można przedstawić w postaci $F(h, h') = Ahh' = \langle Ah, h' \rangle$, gdzie A — macierz kwadratowa $n \times n$. Takie przekształcenie dwuliniowe nazywamy formą kwadratową (2-liniową). Podobnie definiujemy formy m-liniowe.

Definicja (określoność formy m-liniowej)

Mówimy, że forma m-liniowa $A \in L_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jest:

- dodatnio określona jeśli $Ah^m > 0 \quad \underset{\substack{h \in \mathbb{R}^n \\ h \neq 0}}{\forall}$.
- ujemnie określona jeśli $Ah^m < 0 \quad \underset{\substack{h \in \mathbb{R}^n \\ h \neq 0}}{\forall}$.
- nieokreślona jeśli $\underset{h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n}{\exists}$ takie, że $Ah_1^m > 0$ i $Ah_2^m < 0$.

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Uwaga

Z powyższej definicji wynika, że forma m-liniowa może być dodatnio albo ujemnie określona jedynie w przypadku, gdy m jest parzyste.

Pytanie

Jak zbadać czy forma kwadratowa jest dodatnio (ujemnie) określona?

Stwierdzenie

A jest dodatnio (ujemnie) określona $\Leftrightarrow$ A jest macierzą symetryczną i ma wszystkie wartości własne dodatnie (ujemne).

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Stwierdzenie (Kryterium Sylvestera)

Niech $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Forma kwadratowa $h \mapsto hAh$ jest:

a) dodatnio określona $\Leftrightarrow$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & & \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} \end{pmatrix} > 0 \qquad \text{dla} \quad l = 1, \dots, n.$$

b) ujemnie określona $\Leftrightarrow$

$$(-1)^l det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & & \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} \end{pmatrix} > 0 \qquad \text{dla} \quad l = 1, \dots, n.$$

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Twierdzenie (Twierdzenie 20)

Niech $f\colon G \overset{otw.}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna w $x_0 \in G$ i $Df(x_0) = 0$. Wówczas jeśli forma kwadratowa $h \mapsto D^2 f(x_0)hh$ jest dodatnio (ujemnie) określona, to f przyjmuje w x_0 minimum (maksimum) lokalne. Jeśli forma kwadratowa jest nieokreślona, to f nie przyjmuje w x_0 ekstremum lokalnego.

Dowód.

Oznaczmy $2F(h) := D^2 f(x_0)hh$. Wówczas z lokalnego wzoru Taylora

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = F(h) + h^2\psi(h).$$

Załóżmy, że forma kwadratowa jest dodatnio określona, czyli $F(h) \geqslant Mh^2$ dla każdego $h \in \mathbb{R}^n$.
Ponieważ $\psi(h) \to 0$ przy $h \to 0$, to istnieje $\delta \geqslant 0$, że jeśli $\|h\| < \delta$, to $x_0 + h \in G$ i $\psi(h) > -\frac{1}{2}M$. □

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Dowód.

Wówczas dla $\|h\| < \delta$ mamy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geqslant h^2(M + \psi(h)) \geqslant \frac{1}{2}Mh^2 > 0.$$

Zatem f przyjmuje w x_0 minimum lokalne.
Podobnie dla formy ujemnie określonej otrzymujemy maksimum lokalne.

Jeśli forma kwadratowa F jest nieokreślona, to $a = F(h) > 0$, $a' = F(h') < 0$, dla pewnych $h, h' \in \mathbb{R}^n$.

Stąd $f(x^0 + th) - f(x^0) = t^2(a + h^2\psi(th)) > 0$ dla małych t
i $f(x^0 + th') - f(x^0) = t^2(a' + h'^2\psi(th')) < 0$ dla małych t.

Zatem f nie przyjmuje ekstremum lokalnego w x_0. □

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

W podobny sposób można uogólnić powyższe twierdzenie do:

Twierdzenie (Twierdzenie 21)

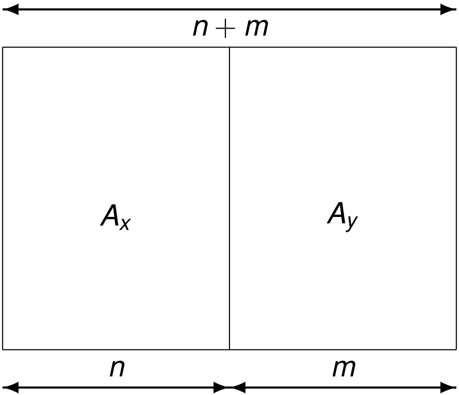
Niech $f\colon G \overset{otw.}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *m-krotnie różniczkowalna w* $x_0 \in G$ *oraz*

$$Df(x_0) = \ldots = D^{m-1}f(x_0) = 0 \quad i \quad D^m f(x_0) \neq 0.$$

Jeśli $D^m f(x_0)$ *jest dodatnio (ujemnie) określona , to* f *posiada w* x_0 *minimum (maksimum) lokalne.*

Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Niech $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ i niech $A_x \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ i $A_y \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ będą zdefiniowane przez wzór: jeśli $h \in \mathbb{R}^n$ i $k \in \mathbb{R}^m$ to $A(h,k) = A_x h + A_y k$, gdzie $A_x h = A(h,0)$, $A_y k = A(0,k)$.



$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$
$$y = (y_1, \ldots, y_m)$$

A

Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Twierdzenie (Twierdzenie 12, o funkcji uwikłanej)

Niech $f\colon E \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ *klasy* C^1 *takie, że* $f(a,b) = 0$ *dla pewnego* $(a,b) \in E$, $A = Df(a,b)$ *i niech* A_x *będzie odwracalne. Wtedy istnieją zbiory otwarte* $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ *i* $W \subseteq \mathbb{R}^m$ *takie, że* $(a,b) \in U$ *i* $b \in W$ *oraz*

i) $\forall y \in W$ *istnieje dokładnie jeden* x *taki, że* $(x,y) \in U$ *i* $f(x,y) = 0$.

ii) *Jeśli* x *jest zdefiniowany jako* $x = g(y)$ *to* g *jest odwzorowaniem klasy* C^1 *zbioru* W *w* $\mathbb{R}^n$, $g(b) = a, f(g(y),y) = 0$, $Dg(b) = -A_x^{-1}A_y$.

Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Uwaga

Jak należy rozumieć to twierdzenie?

$$n \text{ równań} \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases} \quad \underset{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} \text{ nieosob.}}{\overset{\text{TFU}}{\Longrightarrow}}$$

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, \ldots, y_m) \end{cases} .$$

Jeżeli są spełnione założenia TFU, to można układ ten rozwikłać ze względu na x.

Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Uwaga

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{układ rozwikłujemy względem } x]{(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{ij} \text{ nieosobliwa}} \text{(TFU)}$$

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1,\ldots,y_m) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1,\ldots,y_m). \end{cases}$$

Stąd mamy

$$\begin{cases} f_1(g_1(\ldots),\ldots,g_n(\ldots),y_1,\ldots,y_m)=0 & : \frac{\partial}{\partial y_k} \qquad (k=1,\ldots,m) \\ \vdots \\ f_n(g_1(\ldots),\ldots,g_n(\ldots),y_1,\ldots,y_m)=0 & : \frac{\partial}{\partial y_k}. \end{cases}$$

Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Uwaga

Zatem

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial y_k} = -\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \quad i = 1, ..., n, \; k = 1, ..., m$$

z niewiadomymi $\frac{\partial g_j}{\partial y_k}$, czyli dostaliśmy układ *nm* równań z niewiadomymi $(\frac{\partial g_j}{\partial y_k})$ $(j = 1, \ldots, n,\ k = 1, ..., m)$

Twierdzenie o funkcji uwikłanej

Przykład (TFU dla $n = m = 1$)

Niech $f\colon E \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy C^1, $f(a,b) = 0$ dla pewnego $(a,b) \in E$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$. Wówczas istnieje $W \overset{\text{otw.}}{\subseteq} \mathbb{R}$, $b \in W$ i $g\colon W \to \mathbb{R}$ klasy C^1 takie, że $g(b) = a$, $f(g(y),y) = 0$ i $g'(b) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}$.

Rzeczywiście, jeśli $f(g(y),y) = 0$, to

$$\frac{d}{dy} f(g(y),y) = \frac{\partial f}{\partial x} g' + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

a zatem

$$g'(y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}.$$

Koniec wykładu VI

Dziękuję za uwagę!