Analiza wektorowa dla studentów zaocznych

Wykład VII

Ekstrema warunkowe funkcji wielu zmiennych, całka *n*-wymiarowa, funkcje całkowalne

Sławomir Michalik

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

17 grudnia 2022

Rozmaitości o równaniu $F(x) = 0$

Definicja (Wektor normalny)

Jeżeli $M \subset \mathbb{R}^n$ jest dowolną rozmaitością k-wymiarową, to wektorem normalnym do M w punkcie $x_0 \in M$ nazywamy taki element $\bar{n} \in \mathbb{R}^n$, który jest prostopadły do $T(x_0, M)$ (tzn. $\bar{n} \cdot s = 0 \quad \forall s \in T(x_0, M)$).

Zbiór wszystkich wektorów normalnych do M w punkcie x_0 będziemy oznaczać przez $N(x_0, M)$.

Jest to podprzestrzeń $(n-k)$-wymiarowa w $\mathbb{R}^n$ oraz $\mathbb{R}^n$ jest sumą prostą podprzestrzeni $T(x_0, M)$ i $N(x_0, M)$.

Twierdzenie (Twierdzenie 13)

Niech $F \colon E \overset{otw.}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ klasy C^1 i $m < n$, $M = \{x \in E \colon F(x) = 0\}$ oraz $\operatorname{rank} DF(x) = m$ dla każdego $x \in M$. Wówczas:

1. *M jest rozmaitością k-wymiarową, $k = n - m$.*
2. *Jeśli $x_0 \in M$ to $T(x_0, M) = \ker DF(x_0) = \{h \in \mathbb{R}^n \colon DF(x_0)h = 0\}$ i $N(x_0, M) = \operatorname{span}\{\operatorname{grad} F_i(x_0), \quad i = 1, \dots, m\}$.*

Rozmaitości o równaniu $F(x) = 0$

Uwaga

Nie każda rozmaitość daje się zapisać w postaci $\{x\colon F(x) = 0\}$, np. dla wstęgi Möbiusa nie da się tak zrobić.

Przypuśćmy, że tak jest, czyli istnieje $F\colon G \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takie, że $M = \{x \in G\colon F(x) = 0\}$ i rank $DF(x) = 1$, tzn $\forall x \in M \operatorname{grad} F(x) \neq 0$.

Wówczas istniałoby odwzorowanie $\bar{n}\colon M \to \mathbb{R}^3$ takie, że dla każdego $x \in M$ funkcja $\bar{n}(x)$ jest wersorem normalnym do M w x, przedstawione w postaci:

$$\bar{n}\colon x \mapsto \frac{\operatorname{grad} F(x)}{||\operatorname{grad} F(x)||}$$

Jest to niemożliwe, bo po obiegu wstęgi wersor musiałby przyjąć przeciwny zwrot, czyli $\bar{n}(x_0) = -\bar{n}(x_0)$ — sprzeczność.

Ekstrema funkcji na rozmaitościach

Twierdzenie (Twierdzenie 14, Lagrange'a o mnożnikach)

Niech $F \colon E \overset{otw.}{\subseteq} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *klasy* C^1, $m < n$, $M = \{x \in E \colon F(x) = 0\}$ *oraz* $\operatorname{rank} DF(x) = m \ \forall x \in M$ *i* $f \colon E \to \mathbb{R}$.
Jeśli funkcja $f_{|M}$ *przyjmuje ekstremum lokalne w punkcie* $x_0 \in M$ *i* f *jest różniczkowalna w tym punkcie, to istnieje forma liniowa* $\Lambda \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ *taka, że* x_0 *jest punktem stacjonarnym funkcji* $g = f - \Lambda \circ F$ *(funkcji Lagrange'a), czyli* $Dg(x_0) = 0$ *(*$D_j g(x_0) = 0$ *dla* $j = 1, \ldots, n$*).*

Pytanie

Jak korzystając z twierdzenia znaleźć x_0?

Mamy $\Lambda \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\Lambda y = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$, gdzie $\lambda_i \in \mathbb{R}$ są nazywane mnożnikami Lagrange'a.

Wtedy $g = f - \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i$.

Ekstrema funkcji na rozmaitościach

Wówczas

$$Dg(x_0) = 0 \iff Df(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i DF_i(x_0) \iff D_j f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D_j F_i(x_0).$$

Zatem dostajemy $n+m$ równań z niewiadomymi $x_{01}, \ldots, x_{0n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$n+m \text{ równań} \begin{cases} D_1 f(x_0) = \lambda_1 D_1 F_1(x_0) + \ldots + \lambda_m D_1 F_m(x_0) \\ \vdots \\ D_n f(x_0) = \lambda_1 D_n F_1(x_0) + \ldots + \lambda_m D_1 F_m(x_0) \\ \\ F_1(x_0) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_0) = 0 \end{cases}$$

Ekstrema funkcji na rozmaitościach

Przykład

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $f(x,y,z) = xyz$.

$$\max_M f = ? \qquad \min_M f = ?$$

Rozwiązanie:

$$F(x,y,z) = (x+y+z-1, x^2+y^2+z^2-1), \qquad F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon F(x,y,z) = 0\}.$$

Funkcja Lagrange'a:

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= f(x,y,z) - \Lambda \circ F(x,y,z) \\ &= xyz - \lambda_1(x+y+z-1) - \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1). \end{aligned}$$

Ekstrema funkcji na rozmaitościach

Przykład

Dostajemy układ 5 równań na $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$:

$$\begin{cases} yz = \lambda_1 + 2x\lambda_2 \\ xz = \lambda_1 + 2y\lambda_2 \\ xy = \lambda_1 + 2z\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań ma postać:

$$\left.\begin{array}{c} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array}\right\} A_{1/2/3}, \qquad \left.\begin{array}{c} (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) \\ (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{array}\right\} B_{1/2/3}.$$

$f(A) = 0$ – maksimum i $f(B) = -\frac{4}{27}$ – minimum (bo M – zwarty).

Całka n-wymiarowa

Niech $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ jest przedziałem domkniętym. Skonstruujemy całkę z f — podobnie do konstrukcji całki Riemanna dla funkcji jednej zmiennej.

Definicja (Podział odcinka)

Podziałem P odcinka domkniętego $[a, b]$ nazywamy ciąg $t_0, \ldots, t_k$, gdzie $a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k = b$. P dzieli $[a, b]$ na k odcinków $[t_{i-1}, t_i]$.

Definicja (Podział przedziału)

Podziałem przedziału $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ nazywamy zbiór podziałów $P = (P_1, \ldots, P_n)$, gdzie każdy P_i jest podziałem odcinka $[a_i, b_i]$. Jeżeli P_i dzieli odcinek $[a_i, b_i]$ na N_i odcinków, to $P = (P_1 \ldots P_n)$ dzieli $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ na $N = N_1 \cdot \ldots \cdot N_n$ przedziałów, które będziemy nazywać podprzedziałami podziału P.

Całka n-wymiarowa

Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}^n$ przedział, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ ograniczone, P — podział A, S — podprzedział podziału A (ozn. $S \in P$). Niech dalej:

$$m_S(f) = \inf\{f(x)\colon x \in S\}, \qquad M_S(f) = \sup\{f(x)\colon x \in S\}.$$

Definicja (Objętość przedziału)

Objętością przedziału $S = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ (lub $S = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$) nazywamy liczbę $v(S) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$.

Definicja (Suma dolna i górna)

Sumę dolną (L) i górną (U) funkcji f dla podziału P określamy wzorami:

$$L(f, P) = \sum_{S \in P} m_S(f) \cdot v(S), \qquad U(f, P) = \sum_{S \in P} M_S(f) \cdot v(S)$$

Oczywiście $L(f, P) \leqslant U(f, P)$.

Całka *n*-wymiarowa

Lemat

Niech podział P' rozdrabnia podział P (tzn. że każdy podprzedział w P' jest zawarty w pewnym podprzedziale w P). Wówczas:

$$L(f,P) \leqslant L(f,P') \quad \text{i} \quad U(f,P') \leqslant U(f,P).$$

Dowód.

Każdy podprzedział S podziału P jest rozdzielony na kilka podprzedziałów $S_1,\ldots,S_\alpha$ podziału P', więc $v(S) = v(S_1) + \ldots + v(S_\alpha)$. Stąd $m_S(f) \leqslant m_{S_i}(f)$ oraz

$$\begin{aligned} m_S(f)\cdot v(S) &= m_S(f)\cdot v(S_1) + \ldots + m_S(f)\cdot v(S_\alpha) \\ &\leqslant m_{S_1}(f)v(S_1) + \ldots + m_{S_\alpha}(f)\cdot v(S_\alpha). \end{aligned}$$

Sumując po wszystkich podprzedziałach dostaniemy: $L(f,P) \leqslant L(f,P')$. Dla sum górnych dowód jest podobny. $\square$

Całka n-wymiarowa

Wniosek

Jeżeli P i P' są dwoma dowolnymi podziałami, to $L(f, P) \leqslant U(f, P')$.

Dowód.

Niech P'' podział rozdrabniający zarówno dla P jak i dla P'. Wówczas z lematu:

$$L(f, P) \leqslant L(f, P'') \leqslant U(f, P'') \leqslant U(f, P').$$

□

Uwaga

Z wniosku wynika, że kres górny wszystkich sum dolnych dla f jest mniejszy lub równy od kresu dolnego wszystkich sum górnych dla f.

Całka n-wymiarowa

Definicja (Funkcja całkowalna, całka)

Funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywa się całkowalną na przedziale A jeżeli f ograniczona oraz $\sup\limits_P L(f,P) = \inf\limits_P U(f,P)$.
Określoną tym równaniem liczbę oznacza się $\int\limits_A f$ i nazywa się całką z funkcji f na przedziale A.
Stosowany zapis:

$$\int\limits_A f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n.$$

Jeżeli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $a \leqslant b$, to

$$\int\limits_{[a,b]} f = \int\limits_a^b f.$$

Koniec wykładu VII

Dziękuję za uwagę!