Analiza wektorowa dla studentów zaocznych

Wykład VIII
Zbiory miary i objętości zero, całki po dowolnych zbiorach, twierdzenie Fubiniego

Sławomir Michalik

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

17 grudnia 2022

Całka *n*-wymiarowa

Twierdzenie (Twierdzenie 24, Kryterium całkowalności funkcji)

Funkcja ograniczona $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje taki podział* P *przedziału* A*, że*

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon. \tag{1}$$

Całka n-wymiarowa

Przykład

1. $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ — funkcja stała $f(x) \equiv c$. Wówczas dla dowolnego podziału P i podprzedziału S mamy $m_S(f) = M_S(f) = c$. Zatem $L(f,P) = U(f,P) = \sum_{S \in P} c \cdot v(S) = c \cdot v(A)$. Stąd $\int_A f = c \cdot v(A)$.
2. Niech $f\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie określona jako

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Niech P — pewien podział i $S \in P$. Wtedy S zawiera zarówno (x,y) z $x \in \mathbb{Q}$ jak i z $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Stąd $m_S(f) = 0$ i $M_S(f) = 1$. Wówczas

$$L(f,P) = \sum_{S \in P} 0 \cdot v(S) = 0, \;\; U(f,P) = \sum_{S \in P} 1 \cdot v(S) = v([0,1]^2) = 1.$$

Dlatego f nie jest całkowalna.

Zbiory miary i objętości zero

Definicja (Zbiór miary zero)

Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma (n-wymiarową) miarę 0, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie pokrycie $\{U_1, U_2, U_3, \ldots\}$ zbioru A przedziałami domkniętymi, że $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$.

Uwagi

1. Jeżeli A ma miarę zero i $B \subset A$, to B ma też miarę zero.
2. Zbiór składający się ze skończenie wielu lub przeliczalnie wielu punktów jest miary zero. Rzeczywiście, niech $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ i niech dla ustalonego $\varepsilon > 0$ oznaczmy przez U_i przedział domknięty zawierający a_i taki, że $v(U_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Wówczas $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$.

Zbiory miary i objętości zero

Twierdzenie (Twierdzenie 25)

Jeżeli $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ *i każde* A_i *ma miarę zero, to* A *też ma miarę zero.*

Definicja (Zbiór objętości 0)

Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma (n-wymiarową) objętość 0, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie pokrycie skończone $\{U_1, \ldots, U_n\}$ zbioru A przedziałami domkniętymi, że $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$.

Uwaga

Jeżeli A ma objętość zero, to A ma miarę zero.

Zbiory miary i objętości zero

Twierdzenie (Twierdzenie 26)

Jeżeli $a < b$, to $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nie ma objętości zero. Co więcej jeżeli $\{U_1, \ldots, U_n\}$ pokrycie skończone $[a, b]$ przedziałami domkniętymi, to $\sum\limits_{i=1}^{n} v(U_i) \geqslant b - a$.

Dowód.

Załóżmy, że każde $U_i \subset [a, b]$. Niech $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ będą wszystkimi punktami końcowymi wszystkich U_i. Wtedy każda liczba $v(U_i)$ jest sumą pewnych różnic $t_j - t_{j-1}$. Ponadto każde $[t_{j-1}, t_j]$ leży przynajmniej w jednym U_i, więc $\sum\limits_{i=1}^{n} v(U_i) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{k} (t_j - t_{j-1}) = b - a$. $\square$

Zbiory miary i objętości zero

Jeżeli $a < b$, to $[a, b]$ też nie ma miary 0. Wynika to z poniższego twierdzenia:

Twierdzenie (Twierdzenie 27)

Jeżeli A jest zwarty i ma miarę zero, to A ma objętość 0.

Dowód.

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ A ma miarę 0, to istnieje także pokrycie $\{U_1, U_2, \ldots\}$ zbioru A przedziałami otwartymi, że $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$. Ponieważ A jest zwarty, pewna skończona liczba $U_1, \ldots, U_n$ z U_i także pokrywa A i z pewnością $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \varepsilon$. □

Charakteryzacja funkcji całkowalnych

Twierdzenie (Twierdzenie 28)

Niech A przedział domknięty, a $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcja ograniczona. Niech B zbiór nieciągłości funkcji f.Wówczas f jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy B jest zbiorem miary 0.

Całki po dowolnych zbiorach $C \subset \mathbb{R}^n$

Definicja (Funkcja charakterystyczna)

Niech $C \subset \mathbb{R}^n$. Funkcją charakterystyczną χ_C zbioru C nazywamy funkcję

$$\chi_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x \notin C \\ 1 & \text{gdy} \quad x \in C. \end{cases}$$

Definicja (Całka po zbiorze C)

Jeżeli $C \subseteq A$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ — przedział domknięty i $f \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ ograniczona to całką z f po C nazywamy

$$\int_C f := \int_A f \cdot \chi_C, \quad \text{o ile} \quad f \cdot \chi_C \quad \text{jest całkowalna.}$$

Całki po dowolnych zbiorach $C \subset \mathbb{R}^n$

Twierdzenie (Twierdzenie 29)

Funkcja $\chi_C \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy brzeg* C *ma miarę* 0.

Definicja (Zbiór mierzalny w sensie Jordana)

Zbiór ograniczony $C \subset \mathbb{R}^n$, którego brzeg ma miarę zero nazywamy mierzalnym w sensie Jordana.

Definicja (Objętość zbioru)

Niech $C \subset \mathbb{R}^n$ będzie mierzalny w sensie Jordana. Całkę $\int\limits_C 1$ nazywamy (n-wymiarową) objętością zbioru C.

1-wymiarową objętość nazywamy długością, a 2-wymiarową — polem.

Twierdzenie Fubiniego

Załóżmy, że $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ dodatnia funkcja ciągła.
Niech $t_0,\ldots,t_n$ — podział odcinka $[a,b]$ dzielący $[a,b]\times[c,d]$ na n pasków za pomocą odcinków $\{t_i\}\times[c,d]$. Niech $g_x(y):=f(x,y)$.
Wówczas pole pod wykresem f i powyżej $\{x\}\times[c,d]$ wynosi

$$\int_c^d g_x = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Zatem objętość obszaru pod wykresem f i powyżej $[t_{i-1},t_i]\times[c,d]$ wynosi w przybliżeniu $(t_i-t_{i-1})\int_c^d f(x,y)\,dy$ dla dowolnego $x\in[t_{i-1},t_i]$.
Zatem

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \sum_{i=1}^{n}\int_{[t_{i-1},t_i]\times[c,d]} f \approx \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\int_c^d f(x_i,y)\,dy$$

dla $x_i\in[t_{i-1},t_i]$.

Twierdzenie Fubiniego

Z drugiej strony podobne sumy pojawiają się w definicji całki

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

Zatem jeśli $h(x) = \int_c^d g_x = \int_c^d f(x,y)\,dy$, to można miec nadzieję, że h jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ oraz

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f \stackrel{?}{=} \int_a^b h = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

Dla f — ciągłej dobrze, ale ogólnie trzeba uważać. Np jeśli zbiór nieciągłości funkcji f to $\{x_0\} \times [c,d]$, $x_0 \in [a,b]$, to f całkowalna na $[a,b] \times [c,d]$, ale $h(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)\,dy$ może nie być określone.

Twierdzenie Fubiniego

Definicja (Całka dolna i górna)

Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$ funkcja ograniczona na przedziale domkniętym. Wówczas dolną (odpowiednio górną) całkę z f na A definiujemy jako

$$L\int_A f = \sup_{P \text{ — podział } A} L(f, P) \qquad (\text{odp. } U\int_A f = \inf_{P \text{ — podział } A} U(f, P)),$$

gdzie $L(f, P)$ jest sumą dolną, to znaczy

$$L(f, P) = \sum_{S \in P} m_S(f) v(S) \quad \text{i} \quad m_S(f) = \inf\{f(x)\colon x \in S\},$$

zaś $U(f, P)$ jest sumą górną, czyli

$$U(f, P) = \sum_{S \in P} M_S(f) v(S) \quad \text{i} \quad M_S(f) = \sup\{f(x)\colon x \in S\}.$$

Twierdzenie Fubiniego

Twierdzenie (Twierdzenie 30, Twierdzenie Fubiniego)

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ i $B \subset \mathbb{R}^m$ przedziały domknięte i $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$ całkowalna. Niech dla $x \in A$ funkcja $g_x\colon B \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $g_x(y) = f(x,y)$ i przyjmijmy

$$\mathcal{L}(x) := L\int_B g_x = L\int_B f(x,y)\,dy, \qquad \mathcal{U}(x) := U\int_B g_x = U\int_B f(x,y)\,dy.$$

Wówczas $\mathcal{L}$ i $\mathcal{U}$ są całkowalne na A i zachodzi

$$\int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{L} = \int_A \left(L\int_B f(x,y)\,dy\right) dx,$$
$$\int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{U} = \int_A \left(U\int_B f(x,y)\,dy\right) dx.$$

Twierdzenie Fubiniego

Uwagi:

1. Podobnie wykazuje się, że

$$\int_{A\times B} f = \int_B \Big(L\int_A f(x,y)\,dx \Big)\,dy = \int_B \Big(U\int_A f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

2. Często g_x jest całkowalna (np jeśli $f(x,y)$ jest ciągła), czyli

$$\int_{A\times B} f = \int_A \Big(\int_B f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

Twierdzenie Fubiniego

Uwagi:

3. Jeżeli g_x jest niecałkowalna dla skończonej liczby elementów $x \in A$, czyli $\mathcal{L}(x) = \int_B f(x, y)\, dy$ dla wszystkich x poza skończoną liczbą, to wówczas po przedefiniowaniu $\mathcal{L}(x)$ w skończonej liczbie punktów otrzymujemy

$$\int_{A\times B} f = \int_A \Big(\int_B f(x, y)\, dy \Big)\, dx,$$

gdzie $\int_B f(x, y)\, dy$ okreslamy jako 0 tam, gdzie nie istnieje.

4. Jeżeli $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ i $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest wystarczająco przyzwoita, to stosując wielokrotnie twierdzenie Fubiniego dostajemy

$$\int_A f = \int_{a_n}^{b_n} \Big(\ldots \Big(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \Big) \ldots \Big)\, dx_n.$$

Koniec wykładu VIII

Dziękuję za uwagę!