Analiza wektorowa dla studentów zaocznych

Wykład IX

Całkowanie przez podstawienie, całki krzywoliniowe

Sławomir Michalik

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

14 stycznia 2023

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Niech $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną i $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła. Wówczas

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'. \tag{1}$$

Jeżeli $F' = f$ to $L = F(g(b)) - F(g(a))$. Z drugiej strony $(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$, czyli $P = F \circ g(b) - F \circ g(a) = L$.

Niech dodatkowo g będzie różnowartościowe. Wówczas

$$\int_{g((a,b))} f = \int_{(a,b)} (f \circ g) \cdot |g'|,$$

bo:

$$g \nearrow: \quad g' > 0 \quad L = \int_{g(a)}^{g(b)} f, \quad P = \int_a^b (f \circ g) \cdot g' \quad \text{z (1)} \quad L = P,$$

$$g \searrow: \quad g' < 0 \quad L = \int_{g(b)}^{g(a)} f, \quad P = -\int_a^b (f \circ g) \cdot g' \quad \text{z (1)} \quad L = P.$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Twierdzenie (Twierdzenie 32, o całkowaniu przez podstawienie)

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym zaś $g\colon A \to \mathbb{R}^n$ dyfeomorfizmem na obraz. Jeżeli $f\colon g(A) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, to

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) \cdot |\det Dg|.$$

Krzywe w $\mathbb{R}^n$

Definicja

Krzywą w $\mathbb{R}^n$ lub łukiem w $\mathbb{R}^n$ nazywamy odwzorowanie ciągłe $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $a \leqslant b$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Początkiem i końcem krzywej γ nazywamy odpowiednio punkt $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$.

Krzywą γ nazywamy konturem lub krzywą zamkniętą jeśli $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Krzywą γ nazywamy kawałkami gładką jeśli istnieja takie $a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_m = b$, że γ na $[a_{j-1}, a_j]$ jest klasy C^1 $(j = 1, ..., m)$.

Długością krzywej kawałkami gładkiej $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę

$$|\gamma| := \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Całka krzywoliniowa niezorientowana (I rodzaju)

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ krzywa kawałkami gładka, $P = t_0, t_1, \dots, t_m$, gdzie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ — podział odcinka $[a,b]$ na m odcinków, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ — dlugość k-tego odcinka podziału P, $\delta(P) = \max\{\Delta t_k \colon 1 \leqslant k \leqslant m\}$ — średnica podziału P, $t_k^* \in [t_{k-1}, t_k]$ — punkt pośredni.

Definicja

Niech f — funkcja ograniczona na krzywej γ. Całkę krzywoliniową niezorientowaną z funkcji f po łuku γ definiujemy wzorem:

$$\int_\gamma f\, ds = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{m} f(\gamma(t_k^*))\Delta S_k,$$

gdzie ΔS_k jest długością łuku łączącego punkty $\gamma(t_{k-1})$ i $\gamma(t_k)$, czyli

$$\Delta S_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Całka krzywoliniowa niezorientowana (I rodzaju)

Uwaga

Porównując definicję całki krzywoliniowej z całką Riemanna funkcji jednej zmiennej dostajemy:

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^m f(\gamma(t_k^*))\|\gamma'(t_k^*)\|(t_k - t_{k-1}).$$

Uwaga

Definicja nie zależy od wyboru parametryzacji krzywej γ, ani od wyboru orientacji, tzn.

$$\int_\gamma f\,ds = \int_{-\gamma} f\,ds,$$

gdzie $-\gamma(t) := \gamma(-t)$, $-\gamma\colon [-b,-a] \to \mathbb{R}^n$.

Całka krzywoliniowa zorientowana (II rodzaju)

Definicja

Polem wektorowym na obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję wektorową określoną wzorem $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$ dla każdego $x \in D$.

Definicja

Całkę krzywoliniową zorientowaną z pola wektorowego F po łuku γ definiujemy wzorem:

$$\int_\gamma F\,dx = \int_\gamma F_1\,dx_1 + ... + F_n d\,x_n = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{m} F_1(\gamma(t_k^*))\Delta x_{1k} + ...$$

$$+F_n(\gamma(t_k^*))\Delta x_{nk} = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{m} F(\gamma(t_k^*)) \cdot \Delta x_k,$$

gdzie $\Delta x_k = (\Delta x_{1k}, ..., \Delta x_{nk})$, zaś $\Delta x_{ik} = \gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})$ jest przyrostem i-tej współrzędnej γ na $[t_{k-1}, t_k]$.

Całka krzywoliniowa zorientowana (II rodzaju)

Uwaga

W zapisie wektorowym definicja ta ma postać:

$$\int_\gamma \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{m} \vec{F}(\vec{x}_k) \cdot d\vec{x}_k.$$

Uwaga

Porównując definicję całki krzywoliniowej zorientowanej z całką Riemanna dostajemy

$$\int_\gamma F\,dx = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} F_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\,dt.$$

Całka krzywoliniowa zorientowana (II rodzaju)

Uwaga

Definicja nie zależy od wyboru parametryzacji, a przy zmienie orientacji zmienia się na przeciwną

$$\int_{-\gamma} F\,dx = -\int_{\gamma} F\,dx.$$

Związek pomiędzy całką krzywoliniową zorientowaną i niezorientowaną

Niech γ — krzywa kawałkami gładka w $\mathbb{R}^n$. Wtedy $\gamma'(t)$ — wektor styczny do krzywej i skierowany zgodnie z orientacją. Składowa styczna do krzywej wyraża się wzorem $F_s = \|F\| \cos\alpha$, gdzie α — kąt pomiędzy $F(\gamma(t))$ i $\gamma'(t)$.
Wówczas

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \|F(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| \cos\alpha = F_s(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|,$$

czyli

$$\int_\gamma F\,dx = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b F_s(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_\gamma F_s\,ds.$$

Koniec wykładu IX

Dziękuję za uwagę!