Analiza wektorowa dla studentów zaocznych

Wykład X
Wzór Greena, pole potencjalne

Sławomir Michalik

Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

14 stycznia 2023

Twierdzenie Greena

Twierdzenie (Twierdzenie 33, Twierdzenie Greena)

Niech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie obszarem normalnym ze względu na obie osie, a $\gamma = \partial D$ brzegiem zbioru D zorientowanym dodatnio (tzn. przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Jeżeli funkcje P i Q mają ciągłe pochodne cząstkowe w zbiorze D, to

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\,dy.$$

Uwaga

Wzór Greena zapisuje się też w postaci

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\,dy.$$

Twierdzenie Greena

Dowód.

Ponieważ D — normalny względem osi OX, to

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}.$$

Niech wykres funkcji $y = y_1(x)$ będzie łukiem γ_1, zaś $y = y_2(x)$ — łukiem γ_2. Wówczas $\gamma = \partial D$ spełnia $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$.
Mamy

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b \Big(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy \Big)\, dx$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\, dx = \int_{\gamma_2} P\, dx - \int_{\gamma_1} P\, dx$$

$$= -\int_{-\gamma_2} P\, dx - \int_{\gamma_1} P\, dx = -\int_{\gamma} P\, dx = -\oint_{\partial D} P\, dx.$$

□

Twierdzenie Greena

Dowód.

Podobnie, korzystając z normalności względem osi OY dostajemy

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_{\partial D} Q\,dy.$$

Stąd

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

□

Twierdzenie Greena

Uwaga

Twierdzenie pozostaje prawdziwe jeśli D jest skończoną sumą zbiorów normalnych, czyli gdy $D = D_1 \cup ... \cup D_n$, gdzie $D_1, ..., D_n$ — zbiory normalne spełniające warunek $\mathrm{Int}\, D_i \cap \mathrm{Int}\, D_j = \emptyset$ dla $i, j = 1, ..., n$, $i \neq j$. Wówczas:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \oint_{\partial D_i} P\, dx + Q\, dy = \oint_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

Twierdzenie Greena

Przykład

Ze wzoru Greena wynikają natychmiast następujące wzory na pole powierzchni:

$$V(D) = -\oint_{\partial D} y\,dx \quad \text{i} \quad V(D) = \oint_{\partial D} x\,dy,$$

bo:

$$\oint_{\partial D} y\,dx = -\iint_D 1\,dx\,dy = -V(D),$$

$$\oint_{\partial D} x\,dy = \iint_D 1\,dx\,dy = V(D).$$

Pola potencjalne

Definicja

Pole wektorowe F określone na obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy potencjalnym, gdy istnieje funkcja $U\colon D \to \mathbb{R}$ taką że,

$$F = \mathrm{grad}\, U = \Big(\frac{\partial U}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial U}{\partial x_n}\Big).$$

Funkcję U nazywamy wówczas potencjałem pola wektorowego F.

Uwaga

Dla pola na płaszczyźnie $F = (P, Q)$ warunek ten ma postać $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Zaś w przestrzeni $F = (P, Q, R)$: $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, $R = \frac{\partial U}{\partial z}$.

Pola potencjalne

Stwierdzenie

Niech pole wektorowe F określone na $D \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie ciągłe i potencjalne. Wówczas całka krzywoliniowa po krzywej $\gamma\colon [a, b] \to D$ nie zależy od drogi całkowania i wyraża się wzorem

$$\int_\gamma F\,dx = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\int_\gamma F\,dx &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{grad} U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\gamma(t))\,dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).\end{aligned}$$

$\square$

Pola potencjalne

Uwaga

Jeśli całka nie zależy od drogi całkowania, to pole F jest potencjalne. Wówczas jako potencjał można wziąć $U(x) := \int_{\gamma_x} F\,dx$, gdzie γ_x — krzywa łącząca określony punkt x_0 z x.

Stwierdzenie (Warunek konieczny i wystarczający potencjalności pola)

Niech $F = (P, Q)$ — pole wektorowe klasy C^1 na obszarze jednospójnym $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Wówczas pole F jest potencjalne na D wtedy i tylko wtedy gdy $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$.

Pola potencjalne

Dowód.

($\Rightarrow$) Jeśli F — pole potencjalne, to $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$. Wówczas

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

($\Leftarrow$) Z twierdzenie Greena mamy

$$\int_{\partial D} F\,dx = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = 0.$$

Zatem jeśli $\partial D = \gamma_1 - \gamma_2$, to $\int_{\gamma_1} F\,dx = \int_{\gamma_2} F\,dx$, co oznacza, że pole F jest potencjalne. $\square$

Koniec wykładu X

Dziękuję za uwagę!