Funkcje uogólnione
Zestaw ćwiczeń nr 1

Zadanie 1. Niech $h(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{dla} \quad t > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$. Wykaż, że $h(t) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Zadanie 2. Znaleźć nośnik podanych funkcji. Które należą do klasy $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$?

a) $f(x) = \begin{cases} |x|^2(1-|x|^2) & \text{dla} \quad |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla} \quad |x| > 1 \end{cases}$,
b) $g(x) = h(x_1 + x_2 + x_3)$,
c) $p(x, y) = h((1-x^2)(1-y^2))$,
d) $q(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{x^2+2y^2+1}{x^2+2y^2-1}} & \text{dla} \quad x^2 + 2y^2 < 1 \\ 0 & \text{dla} \quad x^2 + 2y^2 \geqslant 1 \end{cases}$.

Zadanie 3. Wykazać, że dane funkcje zbiegają do $\delta(x)$ przy $\varepsilon^+ \to 0$:

a) $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$,
b) $\frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$,
c) $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$.

Zadanie 4. Pokazać, że szereg $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(x-k)$ jest zbieżny w $D'(\mathbb{R})$ dla dowolnych a_k.

Zadanie 5. Niech $\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}[\varphi] := \mathrm{Vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{x} \varphi(x)\, dx$. Wykaż, że $\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x} \to 0$ przy $k \to \infty$ w $\mathrm{D}'(\mathbb{R})$.

Zadanie 6. Wykazać równość $(af)(x+h) = a(x+h)f(x+h)$ w $\mathrm{D}'(\mathbb{R}^n)$ dla $a \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathrm{D}'(\mathbb{R}^n)$ i $h \in \mathbb{R}^n$.

Zadanie 7. Wykazać, że w sensie dystrybucyjnym

a) $(\ln|x|)' = \mathcal{P}\frac{1}{x}$,
b) $(\mathcal{P}\frac{1}{x})' = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$, gdzie $\mathcal{P}\frac{1}{x^2} := \mathrm{Vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\, dx$.

Zadanie 8. Wykazać, że dystrybucja u jest ogólnym rozwiązaniem równania:

a) $xu' = 1$, jeśli $u = c_1 + c_2 1_+(x) + \ln|x|$,
b) $xu' = \mathcal{P}\frac{1}{x}$, jeśli $u = c_1 + c_2 1_+(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x}$,
c) $x^2 u' = 1$, jeśli $u = c_1 + c_2 1_+(x) + c_3\delta(x) - \mathcal{P}\frac{1}{x}$,
d) $(\sin x)u = 0$, jeśli $u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(x - k\pi)$.

Zadanie 9. Wykazać równość $a(x)\delta'(x) = -a'(0)\delta(x) + a(0)\delta'(x)$ dla $a \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ w przestrzeni $\mathrm{D}'(\mathbb{R})$.