**Funkcje uogólnione**
**Zestaw ćwiczeń nr 2**

**Zadanie 10.** Oblicz transformację Fouriera funkcji:

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad |x| \leqslant R \\ 0 & \text{dla} \quad |x| > R \end{cases}$,
b) $f(x) = e^{-x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$,
c) $f(x) = e^{-|x|^2} = e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2}$ dla $x \in \mathbb{R}^n$.

**Zadanie 11.** Korzystając ze wzoru na transformatę Fouriera i odwrotną transformatę Fourier wykaż, że $\hat{\hat{f}}(x) = (2\pi)^n f(-x)$ w $S(\mathbb{R}^n)$ i w $S'(\mathbb{R}^n)$.

**Zadanie 12.** Wykaż formuły Sochockiego:
$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$ oraz $\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}$.

**Zadanie 13.** Oblicz transformację Fouriera dystrybucji:

a) $\delta(x)$,
b) $1(x)$,
c) $1_+(x)$,
d) $\operatorname{sgn}(x)$,
e) $\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

**Zadanie 14.** Wykaż, że $u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x)$ jest rozwiązaniem ogólnym równania $x^m u = 0$ w $D'(\mathbb{R})$.

**Zadanie 15.** Znajdź rozwiązanie fundamentalne dla operatora $L(D)$, gdzie:

a) $L(D) = \frac{d^m}{dt^m} + a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + a_1\frac{d}{dt} + a_0$ jest operatorem różniczkowym zwyczajnym liniowym jednorodnym rzędu $m$;
b) $L(D) = \frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt} + 1$;
c) $L(D) = \frac{d}{dt} + a$;
d) $L(D) = \frac{d^2}{dt^2} + a^2$;
e) $L(D) = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ jest operatorem przewodnictwa cieplnego;
f) $L(D) = \Box_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ jest jednowymiarowym operatorem falowym.