Funkcje uogólnione
Zestaw ćwiczeń nr 3

Zadanie 16. Stosując transformację Fouriera rozwiąż równanie:

a) $-\Delta u + u = f$ w $\mathbb{R}^n$
b) $u_t - \Delta u = 0$ w $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$; $u = g$ na $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$.
c) $u_{tt} - \Delta u = 0$ w $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$; $u = g$, $u_t = 0$ na $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$.

Zadanie 17. Stosując rozwiązanie fundamentalne rozwiąż równanie:

$u_{tt} - \Delta u = f$ w $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$; $u = \varphi$, $u_t = \psi$ na $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$.

Zadanie 18. Wykaż, że $\widehat{\varphi h} = \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{\varphi} * \widehat{h}$ dla $\varphi, h \in S(\mathbb{R}^n)$.
(Uwaga: $\widehat{\widehat{f}}(x) = (2\pi)^n f(-x)$.)

Zadanie 19. Wykaż, że jeśli ciąg M_p spełnia:

(M.1) $M_p^2 \leqslant M_{p-1} M_{p+1}$ dla $p \in \mathbb{N}$,

to ciąg $\{\ln M_p\}$ jest wypukły.

Zadanie 20. Wykaż, że jeśli ciąg M_p spełnia:

(M.0) $M_0 = 1$
(M.1) $M_p^2 \leqslant M_{p-1} M_{p+1}$ dla $p \in \mathbb{N}$,

to $M_q M_{p-q} \leqslant M_p$ dla $0 \leqslant q \leqslant p$.

Zadanie 21. Wykaż, że jeśli ciąg M_p spełnia:

(M.2)' istnieją stałe $A, H > 0$ takie, że $M_{p+1} \leqslant A H^p M_p$ dla $p \in \mathbb{N}_0$,

to $M_{p+q} \leqslant A^q H^{\frac{2p+q-1}{2} q} M_p$ dla każdych $p, q \in \mathbb{N}_0$.

Zadanie 22. Wykaż, że jeśli ciąg M_p spełnia:

(M.2) istnieją stałe $A, H > 0$ takie, że $M_p \leqslant A H^p \min\limits_{0 \leqslant q \leqslant p} M_q M_{p-q}$ dla $p, q \in \mathbb{N}_0$,

to spełnia też (M.2)'.

Zadanie 23. Wykaż, że ciągi $M_p = p!$ i $N_p = p^p$ definiują tę samą klasę funkcji ultraróżniczkowalnych.
(Uwaga: wykorzystaj wzór Stirlinga mówiący, że $n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}$.)

Zadanie 24. Wykaż, że ciąg $M_p = (p!)^s$, gdzie $s > 0$ spełnia warunki (M.0), (M.1), (M.2)' i (M.2).