Funkcje uogólnione
Zestaw ćwiczeń nr 4

Zadanie 25. Niech ciąg (M_p) spełnia (M.0) i (M.1). Wykazać, że ciąg (a_n), gdzie $a_n = \sqrt[n]{M_n}$ jest rosnący, tzn. $a_n \leqslant a_{n+1}$.

Zadanie 26. Znaleźć wzór określający funkcję $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ o nośniku zawartym w przedziale $[-2, 2]$ i taką, że $\varphi(x) = 1$ dla $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 27. Udowodnić następujące twierdzenie Borela:

Niech (α_n) będzie dowolnym ciągiem liczb zespolonych. Wówczas istnieje funkcja $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ taka, że $D^n f(0) = \alpha_n$ dla $n = 0, 1, ...$

Zadanie 28. Znaleźć funkcję skojarzoną $M(\varrho)$ dla ciągu Gevreya $M_p = (p!)^s$ dla $s > 1$.

Zadanie 29. Wykaż, że funkcja

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t^d} & \text{dla} \quad t > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

jest klasy $\mathrm{C}^{\{(p!)^s\}}(\mathbb{R})$, gdzie $d = \frac{1}{1-s}$.

Zadanie 30. Niech $u = \sum_{\alpha=0}^\infty a_\alpha \delta^{(\alpha)}$, gdzie dla każdego $L > 0$ istnieje $C > 0$ takie, że

$$|a_\alpha| \leqslant \frac{CL^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}}.$$

Wykaż, że $u \in D'^{\{M_p\}}(\Omega)$, ale $u \notin D'(\Omega)$