Funkcje uogólnione
Zestaw ćwiczeń nr 6

Zadanie 39. Wykaż, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ $\Phi_m \neq \emptyset$. Innymi słowy wykaż, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $\varphi \in D(\mathbb{R})$ takie, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1 \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)\,dx = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant m).$$

Zadanie 40. Dla dowolnej funkcji $\varphi(x) \in D(\mathbb{R})$ oznaczmy przez $d(\varphi)$ średnicę nośnika φ:

$$d(\varphi) := \sup\{|x-y| \in \mathbb{R} : \ x, y \in \operatorname{supp}(\varphi)\}.$$

Zdefiniujmy dalej operator T_d i odwrotny T_d^{-1} należące do $\mathcal{E}[\Phi, C^\infty]$ wzorami

$$T_d\varphi(x) = \exp(1/d(\varphi)), \qquad T_d^{-1}\varphi(x) = \exp(-1/d(\varphi)).$$

Wykazać że:

1. T_d nie jest operatorem moderowanym.
2. T_d^{-1} jest operatorem zaniedbywalnym.

Zadanie 41. Niech $f(x) = x_+(x)$ i $g(x) = x_-(x)$. Wykazać, że iloczyn funkcji $h(x) = f(x)g(x)$ jest zerowy w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$, ale operator $T_{[fg]}$ nie jest zaniedbywalny, czyli $[T_{[fg]}] \neq 0$ w $\mathcal{G}(\mathbb{R})$.

Zadanie 42. Niech $m \in \mathbb{N}$ i niech operator $T_{x^m[\delta]}$ oznacza iloczyn $T_{[x^m]}T_{[\delta]}$. Wykaż, że chociaż $x^m\delta(x) = 0$ w $D'(\mathbb{R})$, to operator $T_{[x^m]}T_{[\delta]}$ nie jest zaniedbywalny, czyli $[T_{x^m[\delta]}] \neq 0$ w $\mathcal{G}(\mathbb{R})$.