

Wykład z funkcji uogólnionych

Zapraszam wszystkich chętnych na wykład poświęcony teorii funkcji uogólnionych. Jest on dostępny dla wszystkich studentów matematyki poczynając od III roku. Zajęcia (wykład i ćwiczenia) będą odbywać się w poniedziałki w godz. 8:00 – 11:15 w sali 1223. Do wykładu będą dostępne notatki. Warunkiem zaliczenia jest zdanie na zakończenie egzaminu ustnego.

Teoria funkcji uogólnionych narodziła się z potrzeby nadania sensu różniczkowaniu funkcji, które nie są różniczkowalne w klasycznym sensie, ale np. tylko są ciągłe. Dokonał tego Laurent Schwartz, który w tym celu pod koniec lat 40-tych XX wieku stworzył teorię dystrybucji, czyli teorię funkcjonałów zdefiniowanych na odpowiedniej przestrzeni funkcji próbnych. Dzięki temu można stosować rachunek różniczkowy do znacznie szerszej klasy funkcji (np. do wszystkich funkcji ciągłych) niż same funkcje różniczkowalne. W szczególności można również szukać rozwiązań równań różniczkowych w tej ogólniejszej klasie funkcji.

Wykład zacznie się od zdefiniowania dystrybucji i opisanie ich własności. Zostaną również wprowadzone i opisane pojęcia splotu i transformacji Fouriera dla funkcji oraz będzie pokazane jak te definicje dają się rozszerzyć na dystrybucje. Następnie udowodnione zostanie słynne twierdzenie Paleya-Wienera-Schwartza mówiące, że transformacja Fouriera zadaje izomorfizm pomiędzy przestrzenią dystrybucji, a odpowiednią klasą funkcji analitycznych. Jako przykład zastosowania, narzędzia te (dystrybucje, splot i transformacja Fouriera) zostaną wykorzystane do znajdowania rozwiązań liniowych równań różniczkowych.

Następnie opisana zostanie szersza klasa funkcji uogólnionych niż dystrybucje, a mianowicie ultradystrybucje. W tym celu zostanie zdefiniowana klasa funkcji quasi-analitycznych i przedstawione fundamentalne twierdzenie Denjoy-Carlemana.

Kolejna część będzie poświęcona innemu podejściu do funkcji uogólnionych, a mianowicie stworzonej przez Mikio Sato pod koniec lat 50-tych XX wieku teorii hiperfunkcji. Hiperfunkcje, w odróżnieniu od dystrybucji definiuje się za pomocą wartości brzegowych funkcji holomorficznnych. Dlatego też do ich badania stosuje się metody analizy zespolonej. Wykazane zostanie w szczególności, że dystrybucje stanowią właściwy podzbiór w klasie hiperfunkcji.

Na zakończenie przedstawione zostaną inne pomysły na zdefiniowanie funkcji uogólnionych, w szczególności takie, dla których można wykonywać mnożenie. Dzięki temu można je stosować np. do badania nieliniowych równań różniczkowych.

Serdecznie zapraszam!

Sławomir Michalik

Literatura pomocnicza:

1. A. Kaneko, *Introduction to Hyperfunctions*, Kluwer, Dordrecht 1988.
2. H. Komatsu, *Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 20 (1973), 25–105.
3. H. Marcinkowska, *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*, PWN, Warszawa 1993.
4. W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, PWN, Warszawa 1998.