Zakres materiału na egzamin ustny z Funkcji Uogólnionych

1. Przykłady funkcji uogólnionych: delta Diraca, funkcja Heaviside'a. Różniczkowanie w sensie słabym.
2. Definicja przestrzeni funkcji próbnych $D(\Omega)$ i dystrybucji $D'(\Omega)$.
3. Co to są dystrybucje regularne? Przykłady dystrybucji.
4. Działania na dystrybucjach: dodawanie, mnożenie przez funkcję gładką. Liniowa zamiana zmiennych. Czy określone jest mnożenie dystrybucji?
5. Różniczkowanie dystrybucji i własności pochodnych uogólnionych (z dowodami).
6. Definicja transformacji Fouriera funkcji z $L^1(\mathbb{R}^n)$. Równość Parsevala (z dowodem).
7. Definicja przestrzeni funkcji szybko malejących w nieskończoności $S(\mathbb{R}^n)$ wraz z przykładami.
8. Własności transformacji Fouriera w klasie $S(\mathbb{R}^n)$ (z dowodem).
9. Definicja przestrzeni dystrybucji wolno rosnących $S'(\mathbb{R}^n)$ wraz z przykładami. Jak wygląda transformacja Fouriera dla takich dystrybucji?
10. Definicja splotu funkcji w $L^1(\mathbb{R}^n)$. Najprostsze własności splotu (stwierdzenie ze str. 22 z dowodem).
11. Jak wygląda pochodna i transformacja Fouriera dla splotu funkcji (stwierdzenia ze str. 23 z dowodami).
12. Definicja i własności splotu dystrybucji.
13. Definicja przestrzeni $\mathcal{E}'(\Omega)$ dystrybucji o zwartym nośniku.
14. Transformacja Fouriera-Laplace'a i transformacja Fouriera dla dystrybucji $\mathcal{E}'(\Omega)$.
15. Definicja funkcji ultraróżniczkowalnych klasy $\{M_p\}$ i klasy (M_p). Wykazać, że taka przestrzeń jest zamknięta ze względu na afiniczną zamianę zmiennych, dodawanie i mnożenie przez skalar.
16. Wykazać, że klasa $\{M_p\}$ przy dodatkowych założeniach (jakich?) jest zamknięta na mnożenie i różniczkowanie.
17. Definicja operatora ultraróżniczkowego. Czy przestrzeń klasy $\{M_p\}$ jest zamknięta na działanie operatora ultraróżniczkowego?
18. Definicja klasy quasi-analitycznej. Charakteryzacja tej klasy funkcji (Stwierdzenie 6.12 z dowodem).
19. Twierdzenie Denjoy-Carlemana z dowodem trzech dowolnych wybranych implikacji.

20. Definicja ultradystrybucji Roumieu $D'^{\{M_p\}}(\Omega)$ i Beurlinga $D'^{(M_p)}(\Omega)$.

21. Działania na ultradystrybucjach

22. Definicja hiperfunkcji na zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}$.

23. Wykazać, że przestrzeń $B(\Omega)$ jest niezależna od wyboru zespolonego otoczenia V zbioru Ω (Twierdzenie ze str. 59 z dowodem).

24. W jaki sposób jest zdefiniowane włożenie funkcji analitycznych w hiperfunkcje?

25. Elementarne operacje na hiperfunkcjach.

26. Przykłady hiperfunkcji

27. Definicja obcięcia dla hiperfunkcji z Lematem 10.1.

28. Własność przedłużania dla hiperfunkcji (Twierdzenie ze str. 66 z dowodem).

29. Zdefiniowanie dla hiperfunkcji: nośnika, nośnika osobliwości i całki oznaczonej.

30. Definicja przestrzeni B_K hiperfunkcji o zwartym nośniku $K \subset\subset \Omega$. Wykazać, że nie zależy ona od wyboru Ω (Stwierdzenie ze str. 68 z dowodem).

31. Twierdzenie Köthe (str. 72) wraz z dowodem.

32. Włożenie funkcji lokalnie całkowalnych w hiperfunkcje.

33. Włożenie dystrybucji w hiperfunkcje

34. Definicja i przykłady operatorów lokalnych.

35. Transformacja Fouriera hiperfunkcji o zwartym nośniku i jej własności.

36. Operatory splotu i quasi-splotu oraz ich własności.

37. Algebra $\mathcal{E}[D, C^\infty]$ i jej własności.

38. Definicja algebry różniczkowej Colombeau

39. Włożenie w algebrę Colombeau $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ przestrzeni funkcji $C^\infty(\mathbb{R})$ i $C(\mathbb{R})$ oraz przestrzeni dystrybucji $D'(\mathbb{R})$.

40. Definicja uogólnionych liczb Colombeau i ich związek z liczbami zespolonymi.

Sławomir Michalik