UNIWERSYTET KARDYNAŁA
STEFANA WYSZYŃSKIEGO

**Wydział Matematyczno-Przyrodniczy.
Szkoła Nauk Ścisłych**

ROZPRAWA DOKTORSKA

Funkcje poliharmoniczne na euklidesowych kulach obróconych

Hubert Grzebuła

Nr albumu 3277

Praca napisana pod kierunkiem

dr. hab. Sławomira Michalika, prof. UKSW

Warszawa, 2020

PODZIĘKOWANIA

Pragnę podziękować mojemu promotorowi Panu Profesorowi Sławomirowi Michalikowi za nieocenioną pomoc przy powstaniu niniejszej pracy. Bardzo dziękuję za wielką wiedzę, którą Pan Profesor się ze mną dzielił. Jestem wdzięczny za niezliczone godziny konsultacji, seminariów, za setki wymienionych maili oraz za mnóstwo cennych uwag i komentarzy. Dziękuję panu Profesorowi za niesamowitą życzliwość, wyrozumiałość i cierpliwość.

Jestem bardzo wdzięczny Panu Profesorowi Grzegorzowi Łysikowi za cenne dyskusje i komentarze.

Chciałbym również podziękować mojej Mamie, na którą zawsze mogłem liczyć. Dziękuję za jej wielkie wsparcie, za pomoc w wyborze drogi zawodowej oraz wiarę we mnie. Bardzo dziękuję mojemu Rodzeństwu za wsparcie i wyrozumiałość, w szczególności dziękuję ks. Bartłomiejowi za życzliwość i nieustanną modlitwę.

Streszczenie

Celem niniejszej pracy jest zbadanie własności funkcji poliharmonicznych na sumie euklidesowych, jednostkowych kul obróconych. W pracy badamy zagadnienie Dirichleta, w którym warunki brzegowe wyrażone są w terminach wartości poszukiwanej funkcji poliharmonicznej na sferach obróconych. Jako wniosek otrzymujemy m.in. własność wartości średniej dla funkcji poliharmonicznych. Następnie wprowadzamy pojęcie poliharmonik sferycznych, jest to naturalne uogólnienie harmonik sferycznych. W szczególności rozwijamy teorię poliharmonik strefowych, co pozwala nam, analogicznie jak w przypadku do harmonik strefowych, skonstruować jądro Poissona dla funkcji poliharmonicznych na sumie kul obróconych. Znajdujemy również reprezentację poliharmonicznego jądra Poissona oraz poliharmonik strefowych w terminach wielomianów Gegenbauera. Dalej w pracy rozważamy poliharmoniczną przestrzeń Bergmana na sumie kul obróconych. Korzystając z poliharmonik strefowych wyprowadzamy wzory na jądro tej przestrzeni. Ponadto badamy także ważone jądro Bergmana. Podobnie postępując jak dla nieważonej przestrzeni Bergmana, wyprowadzamy ważone jądro Bergmana dla tej przestrzeni. Na koniec pokazujemy związek między jądrem poliharmonicznym Bergmana na sumie kul obróconych a jądrem Cauchy'ego-Hua dla funkcji holomorficznych na kuli Liego.

Abstract

The aim of this paper is to study the properties of the polyharmonic functions on the union of the rotated unit Euclidean balls. In the paper we examine the Dirichlet type problem for the polyharmonic functions, where the boundary conditions are given only in the terms of the solution. As an application we get among others the mean value property for the polyharmonic functions. Next we introduce and develop the notion of spherical polyharmonics, which are a natural generalisation of the spherical harmonics. In particular we study the theory of zonal polyharmonics, which allows us, analogously to zonal harmonics, to construct Poisson kernels for polyharmonic functions on the union of rotated balls. We find also the representation of Poisson kernels and zonal polyharmonics in terms of the Gegenbauer polynomials. Furthermore, we consider the polyharmonic Bergman space for the union of the rotated unit Euclidean balls. Using so called zonal polyharmonics we derive the formulas for the kernel of this space. Moreover, we study the weighted polyharmonic Bergman space. By the same argument we get the Bergman kernel for this space. Finally, we show the connection between the Poisson kernel for polyharmonic functions on the union of rotated balls and the Cauchy-Hua kernel for holomorphic functions on the Lie ball.

Spis treści

Wstęp

Funkcje poliharmoniczne to jedno z podstawowych pojęć występujących w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Funkcje te były i są nadal obiektem wielu badań naukowych. Powstało wiele prac dotyczących tej klasy funkcji. Bardzo dużo informacji o nich można znaleźć w samej tylko monografii [1]. Funkcje poliharmoniczne często występują przy badaniu zagadnień brzegowych. W monografii [10] znajdziemy wiele takich zagadnień dla równań poliharmonicznych, na przykład zagadnienie Dirichleta z warunkami Naviera, tj. warunkami zawierającymi laplasjany poszukiwanej funkcji na brzegu danego zbioru. Podobne zagadnienie jest rozpatrywane w pracy [3], tutaj jest ono sprowadzane do zagadnienia Riemanna dla funkcji polianalitycznych. Z kolei w pracy [5] rozważane jest zagadnienie Dirichleta, w którym warunki brzegowe określone są przez funkcje całkowalne w pewnej potędze. Wprowadza się przy tym ciąg jąder Poissona, otrzymując reprezentację całkową dla rozwiązania badanego zagadnienia. W pracy [22] podawane są twierdzenia o rozkładzie dla funkcji poliharmonicznych z przestrzeni Bergmana i Hardy'ego. W pracach [28] i [29] badane są przestrzenie poliharmoniczne Bergmana i ich jądro reprodukujące. Ważnym wynikiem dotyczącym funkcji poliharmonicznych jest własność wartości średniej, która wynika z tzw. formuł Pizzettiego. Formuły te pochodzą z prac [15] i [18] (zob. również [16] i [17]). O formułach Pizzettiego i własności wartości średniej jeszcze będziemy mówić bardziej dokładnie, gdyż stanowią one tak naprawdę główny powód, dla którego zajmujemy się funkcjami poliharmonicznymi na sumie obróconych kul euklidesowych.

W niniejszej pracy rozważamy inne zagadnienie Dirichleta dla funkcji poliharmonicznych niż te wymienione wyżej. Zagadnienie to stanowi punkt wyjścia do naszych dalszych badań. Mianowicie rozważamy zagadnienie, w którym warunki brzegowe nie zawierają pochodnych poszukiwanej funkcji jak to ma miejsce we wspomnianych zagadnieniach. Tutaj warunki brzegowe są wyrażone w terminach wartości szukanej funkcji na sferach obróconych. Dokładniej, w pracy będziemy się zajmować następującym zagadnieniem:

Niech $B, S \subseteq \mathbb{R}^n$ będą odpowiednio kulą i sferą jednostkową. Znaleźć funkcję poliharmoniczną u rzędu p na zbiorze $\widehat{B}_p := \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} B$ taką, że u jest funkcją ciągłą na $\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p$, gdzie $\widehat{S}_p := \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} S$, która spełnia następujące warunki brzegowe

$$u(x) = f_k(x) \quad \text{dla} \quad x \in e^{\frac{k\pi i}{p}} S,$$

gdzie f_k są danymi funkcjami ciągłymi odpowiednio na $e^{\frac{k\pi i}{p}} S$ dla $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Zagadnienie takie będziemy zapisywać symbolicznie:

$$\begin{cases} \Delta^p u(x) = 0, & x \in \widehat{B}_p, \\ u(x) = f_k(x), & x \in e^{\frac{k\pi i}{p}} S, \ k = 0, 1, ..., p-1. \end{cases} \tag{0.1}$$

Widzimy, że dla $p = 1$ zagadnienie powyższe jest klasycznym zagadnieniem Dirichleta dla funkcji harmonicznych, które posiada jednoznaczne rozwiązanie w postaci całki Cauchy'ego-Poissona. Motywacja do badania takiego zagadnienia, a co za tym idzie funkcji poliharmonicznych na sumie kul obróconych, pochodzi z prac [15] oraz [21], w których autorzy podają tzw. formuły Pizzettiego dla operatora Δ^p. Zgodnie z formułami Pizzettiego średnie całkowe funkcji analitycznej u odpowiednio po kulach obróconych $x + \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} B(0,r)$ i sferach obróconych $x + \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} S(0,r)$, dane odpowiednio wzorami:

$$N_{\Delta^p}(u; x, r) := \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S u(x + e^{\frac{k\pi i}{p}} r\zeta)\, dS(\zeta),$$

$$M_{\Delta^p}(u; x, r) := \frac{1}{p\Omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_B u(x + e^{\frac{k\pi i}{p}} ry)\, dy,$$

posiadają rozwinięcia

$$N_{\Delta^p}(u; x, r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta^{pj} u(x)}{4^{pj} \left(\frac{n}{2}\right)_{pj} (pj)!} r^{2pj},$$

$$M_{\Delta^p}(u; x, r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta^{pj} u(x)}{4^{pj} \left(\frac{n}{2} + 1\right)_{pj} (pj)!} r^{2pj},$$

gdzie $(a)_k := a(a+1)\ldots(a+k-1)$ dla $k \in \mathbb{N}$ oznacza symbol Pochhammera, zaś ω_n, Ω_n oznaczają odpowiednio pole powierzchni sfery i kuli jednostkowej z $\mathbb{R}^n$. Łatwo zauważyć zatem, że jeśli u jest funkcją poliharmoniczną rzędu p, to u posiada własność wartości średniej na domkniętych kulach obróconych $x_0 + \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} \overline{B}(0,r)$:

$$u(x) = \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int\limits_S u(x + e^{\frac{k\pi i}{p}} r\zeta)\, dS(\zeta)$$

oraz

$$u(x) = \frac{1}{p\Omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int\limits_B u(x + e^{\frac{k\pi i}{p}} ry)\, dy.$$

W szczególności oznacza to, że wartość funkcji poliharmonicznej u w zerze jest jednoznacznie określona przez wartości brzegowe funkcji u na odpowiednich obróconych sferach jednostkowych:

$$u(0) = \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int\limits_S u(e^{\frac{k\pi i}{p}} r\zeta)\, dS(\zeta).$$

Tu pojawia się naturalne pytanie, w jaki sposób określić wartości funkcji poliharmonicznej na całej sumie kul obróconych $\widehat{B}_p$ w terminach wartości brzegowych – odpowiedź stanowi twierdzenie:

Twierdzenie. Zagadnienie Dirichleta (0.1) jeśli posiada rozwiązanie, to jest ono jednoznaczne i określone wzorem

$$u\,(x) = \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int\limits_S \frac{1 - |x|^{2p}}{|e^{\frac{-k\pi i}{p}} x - \zeta|^n} f_k(e^{\frac{k\pi i}{p}} \zeta)\, dS(\zeta). \tag{0.2}$$

Oczywiście dla $p = 1$ wzór w powyższym twierdzeniu pokrywa się ze znanym wzorem Cauchy'ego-Poissona dla funkcji harmonicznych:

$$u\,(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \frac{1 - |x|^2}{|x - \zeta|^n} f_0(\zeta)\, dS(\zeta),$$

gdzie funkcja

$$P(x,\zeta) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \zeta|^n}$$

jest harmonicznym jądrem Poissona dla kuli jednostkowej B. Tu także pojawia się kolejne pytanie, jak określić jądro Poissona dla sumy obróconych kul, ponieważ sam wzór (0.2) nie dostarcza nam takiej informacji.

Z drugiej strony wiemy z teorii funkcji harmonicznych, że harmoniczne jądro Poissona możemy wyznaczyć w terminach harmonik strefowych, które są szczególnym przypadkiem harmonik sferycznych. To sugeruje nam wprowadzenie pojęcia poliharmonik sferycznych jako obcięcie wielomianów poliharmonicznych jednorodnych do zbioru $\widehat{S}_p$. Kluczową tutaj rolę odgrywa przestrzeń Hilberta $L^2(\widehat{S}_p)$, tj. przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem na $\widehat{S}_p$ z iloczynem skalarnym określonym następująco:

$$\langle f, g\rangle_{\widehat{S}_p} := \frac{1}{p}\int_S \sum_{j=0}^{p-1} f(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta)\overline{g(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta)}\, d\sigma(\zeta), \tag{0.3}$$

gdzie σ jest unormowaną miara powierzchniową na S. Wprowadzenie takich przestrzeni pozwala nam wyprowadzić poliharmoniczną wersję twierdzenia o rozkładzie ortogonalnym przestrzeni $L^2(S)$ (zob. [2, Theorem 1]). Dowodzimy mianowicie, że przestrzeń $L^2(\widehat{S}_p)$ jest sumą prostą przestrzeni $\mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$ poliharmonik sferycznych stopnia m i rzędu p (Twierdzenie 3.1):

$$L^2(\widehat{S}_p) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p).$$

Dzięki temu twierdzeniu możemy rozważać przestrzeń $\mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$ jako skończenie wymiarową przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym (0.3) indukowanym z przestrzeni $L^2(\widehat{S}_p)$. To z kolei pozwala nam wprowadzić tzw. poliharmoniki strefowe $Z^p_m(x,\zeta)$ analogicznie do harmonik strefowych. Korzystając z własności poliharmonik strefowych otrzymujemy oczekiwane wzory na poliharmoniczne jądro Poissona dla zbioru $\widehat{B}_p$:

Twierdzenie. Poliharmoniczne jądro Poissona posiada następujące rozwinięcie

$$P_p(x,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Z^p_m(x,\zeta) = \frac{1-|x|^{2p}|\overline{\zeta}|^{2p}}{(x^2\overline{\zeta}^2 - 2x\overline{\zeta}+1)^{n/2}} \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p,\ \zeta \in \widehat{S}_p.$$

Korzystając z ostatniego twierdzenia możemy podać zatem rozwiązanie zagadnienia (0.1) w terminach tzw. całki poliharmonicznej Poissona $P_p[f] := \langle f, P_p(\cdot, x)\rangle_{\widehat{S}_p}$, gdzie $f = f_j$ na $e^{\frac{j\pi i}{p}}S$:

$$u(x) = \begin{cases} P_p[f](x), & x \in \widehat{B}_p, \\ f(x), & x \in \widehat{S}_p. \end{cases}$$

Mając już wzór na jądro poliharmoniczne Poissona a także poliharmoniki strefowe oraz sugerując się teorią funkcji harmonicznych rozważamy przestrzeń Bergmana dla zbioru $\widehat{B}_p$, która składa się z funkcji poliharmonicznych na $\widehat{B}_p$ i spełniających warunek

$$||u||_{b^2_p} := \left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B \left|u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\right|^2_{\mathbb{C}} dy\right)^{1/2} < \infty.$$

Okazuje się, że jest ona przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle u, v\rangle_{b_p^2} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int\limits_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\overline{v(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)}\, dy.$$

Tutaj znowu naszym celem jest znalezienie jądra reprodukującego, zwanego jądrem Bergmana, dla poliharmonicznej przestrzeni Bergmana. Wykorzystując jądro Poissona, poliharmoniki strefowe i inne własności oraz postępując podobnie jak dla harmonicznej przestrzeni Bergmana dostajemy wzory na jądro Bergmana:

$$\begin{aligned} R_p(x,y) &= \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{m=0}^{\infty}(n+2m)Z_m^p(x,y) \\ &= \frac{1}{n\Omega_n}\left(nP_p(x,y) + \frac{d}{dt}P_p(tx,ty)\bigg|_{t=1}\right) \\ &= \frac{(n-4p)|x|^{2p+2}|\overline{y}|^{2p+2} + (8px\overline{y} - n - 4p)|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p} + n(1-|x|^2|\overline{y}|^2)}{n\Omega_n(1-2x\overline{y}+|x|^2|\overline{y}|^2)^{n/2+1}}. \end{aligned}$$

Zauważmy jeszcze, że nasze poliharmoniczne jądro Poissona $P_p(x,\zeta)$ ma podobną postać do jądra harmonicznego Poissona $P(x,\zeta)$ (oczywiście dla $p=1$ jest to ta sama funkcja) jak i tzw. jądra Cauchy'ego-Hua $H(z,\omega)$:

$$H(z,w) = \frac{1}{(z^2\overline{w}^2 - 2z\overline{w} + 1)^{n/2}}.$$

Funkcja $H(z,w)$ jest jądrem reprodukującym dla funkcji holomorficznych na kuli Liego i ciągłych na sferze Liego (por. [21, Theorem 5.7]]), tzn. jeśli $f \in \mathcal{O}(LB) \cap \mathcal{C}(LB \cup LS)$, to

$$f(z) = \int\limits_{LS} H(z,w)f(w)\, d\tilde{\sigma}(w) \qquad \text{dla} \quad z \in LB.$$

Okazuje się, że rzeczywiście istnieje związek pomiędzy funkcjami poliharmonicznymi a funkcjami holomorficznymi, m.in. prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie. Niech $u \in \mathcal{O}(LB) \cap \mathcal{C}(\overline{LB})$, wówczas istnieje ciąg funkcji poliharmonicznych $(u_p)_{p=1}^{\infty}, u_p \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B}_p)$, wzrastającego rzędu p taki, że $u_p = u|_{\widehat{S}_p}$ oraz

$$\lim_{p\to\infty} u_p(z) = \int\limits_{LS} H(z,w)u(w)\, d\tilde{\sigma}(w) = u(z) \quad \text{dla} \quad z \in LB.$$

Praca została podzielona na 5 rozdziałów. Pierwszy rozdział ma charakter wprowadzający. Rozdział drugi oparty jest na wynikach pracy [11], trzeci i piąty na wynikach pracy [12], zaś czwarty na pracy [13]. Wiele dowodów bazuje na dowodach pochodzących z monografii [2], z której też były czerpane inspiracje do badań.

W rozdziale pierwszym podajemy podstawowe pojęcia i oznaczenia jakimi się będziemy dalej posługiwać, przypominamy pojęcie m.in. funkcji harmonicznej, poliharmonicznej, pojęcie kuli i sfery Liego. Ponadto przypominamy fakty znane z teorii funkcji harmonicznych i poliharmonicznych, np. wzór Cauchy'ego-Poissona na rozwiązanie zagadnienia Dirichleta, a także twierdzenie Almansiego. Oprócz tego pokazujemy, że każda funkcja poliharmoniczna na kuli jednostkowej B przedłuża się na kulę obróconą $e^{i\varphi}B$ dla dowolnego $\varphi \in \mathbb{R}$ (Lemat 1.1). Wykorzystujemy przy tym wspomniany wzór Cauchy'ego-Poissona oraz twierdzenie Almansiego. W rozdziale 1 przypominamy również twierdzenie Siciaka (Stwierdzenie 1.4) o holomorficznym przedłużeniu funkcji harmonicznych na kuli B na kulę Liego LB.

Rozdział drugi jest poświęcony wspomnianemu na początku zagadnieniu Dirichleta (0.1). Pokazujemy, że jeśli zagadnienie to ma rozwiązanie to jest ono jednoznaczne i ma postać sumy całek typu Poissona (Twierdzenie 2.1). Na początku dowodzimy odpowiednik twierdzenia Almansiego, w którym podajemy wygodną postać funkcji poliharmonicznych dla naszego zagadnienia (2.1) (Lemat 2.1). W rozdziale 2 podajemy także wnioski z Twierdzenia 2.1, m.in. rozwiązujemy zagadnienie Dirichleta w ogólnym przypadku, tzn. dla kuli $B(a,r)$ z warunkami brzegowymi na zbiorze $a + \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} B$ (Wniosek 2.1) skąd otrzymujemy wspomnianą wcześniej własność wartości średniej (Wniosek 2.2) a także rozwiązanie na zewnętrzne zagadnienie Dirichleta odpowiadające zagadnieniu (0.1) (Wniosek 2.3).

W rozdziale trzecim rozważamy przestrzeń wielomianów poliharmonicznych jednorodnych na $\mathbb{C}^n$. Przypominamy przy tym główne własności wielomianów harmonicznych i próbujemy je przenieść na wielomiany poliharmoniczne (Stwierdzenia 3.2, 3.3, 3.4), podajemy przy tym wersję twierdzenia Almansiego dla wielomianów jednorodnych (Stwierdzenie 3.1). Następnie wprowadzamy tzw. poliharmoniki sferyczne jako obcięcie wielomianów poliharmonicznych jednorodnych do zbioru $\widehat{S}_p$, podajemy ich własności (Wnioski 3.1, 3.2, 3.3 oraz Stwierdzenia 3.5 i 3.6), a także dowodzimy twierdzenie o rozkładzie ortogonalnym przestrzeni $L^2(\widehat{S}_p)$ na sumę prostą przestrzeni poliharmonik sferycznych (Twierdzenie 3.1). Dzięki wspomnianemu twierdzeniu w następnym kroku możemy, na wzór harmonik strefowych, zdefiniować poliharmoniki strefowe. Przenosimy przy tym własności harmonik strefowych na poliharmoniki (Stwierdzenie 3.7, Stwierdzenie 3.8). Znajdujemy przy tym związek poliharmonik z harmonikami strefowymi (Twierdzenie 3.2) oraz podajemy rozkład ortogonalny z Twierdzenia 3.1 dla funkcji z przestrzeni $L^2(\widehat{S}_p)$ (Twierdzenie 3.3). W rozdziale trzecim definiujemy ponadto poliharmoniczne jądro Poissona dla $\widehat{B}_p$ i p - tą całkę Poissona dla funkcji ciągłych na $\widehat{S}_p$. Podajemy własności całki Poissona (Stwierdzenia 3.9, 3.10 i Wniosek 3.5) znajdując ostatecznie wzory na wspomniane jądro Poissona (Twierdzenie 3.4) jego podstawowe własności (Stwierdzenie 3.11), a także jego związek z zagadnieniem Dirichleta (0.1) (Twierdzenie 3.5). Na koniec trzeciego rozdziału wyprowadzamy m.in. wzór jawny na poliharmoniki strefowe, wykorzystując przy tym wielomiany Gegenbauera (Twierdzenie 3.6).

W kolejnym rozdziale badamy przestrzeń poliharmoniczną Bergmana dla zbioru $\widehat{B}_p$. Pokazujemy m.in. że jest ona przestrzenią Hilberta (Wniosek 4.1). Wykorzystując własności poliharmonik sferycznych wyprowadzamy wzór na poliharmoniczne jądro Bergmana w terminach poliharmonik strefowych (Twierdzenie 4.1), skąd dostajemy wzór jawny na to jądro (Twierdzenie 4.2). Ponownie stosując Twierdzenie 4.1 i poliharmoniki strefowe dostajemy wzór na poliharmoniczne jądro Bergmana w terminach harmonicznego jądra Bergmana i harmonicznego jądra Poissona (Twierdzenie 4.3). W kolejnej części rozdziału czwartego zajmujemy się poliharmoniczną przestrzenią ważoną Bergmana. Postępując podobnie jak w przypadku przestrzeni Bergmana bez wag pokazujemy, że jest ona przestrzenią Hilberta (Wniosek 2.2) i dostajemy odpowiednie wzory na jej jądro reprodukujące, tj. nieważone jądro poliharmoniczne Bergmana (Twierdzenia 4.4 i 4.6). Korzystając z tzw. pochodnych ułamkowych dostajemy kolejną postać jądra ważonego Bergmana (Twierdzenie 4.5).

W ostatnim rozdziale badamy związek funkcji poliharmonicznych na $\widehat{B}_p$ z funkcjami holomorficznymi na kuli Liego LB. W tym celu przypominamy kilka faktów dla funkcji holomorficznych na LB w tym jądro Cauchy'ego-Hua. Następnie porównujemy poliharmoniczne jądro Poissona dla $\widehat{B}_p$ z jądrem Cauchy'ego-Hua dla kuli Liego (Stwierdzenie 5.2), a także pokazujemy, że dla każdej funkcji holomorficznej na kuli Liego i ciągłej na sferze Liego istnieje ciąg funkcji poliharmonicznych wzrastającego rzędu, który zbiega do tej funkcji (5.1). Jako wniosek otrzymujemy własność wartości średniej dla funkcji holomorficznych na LB (Wniosek 5.1).

Rozdział 1

Wprowadzenie

W tym rozdziale podamy podstawowe definicje i oznaczenia jakimi się będziemy posługiwać w całej pracy. Przypomnimy m.in. pojęcie funkcji harmonicznych, poliharmonicznych, czy też definicję kuli i sfery Liego. Ponadto przypomnimy kilka znanych faktów z teorii funkcji harmonicznych i poliharmonicznych, w tym całkę Poissona dla funkcji harmonicznych, własności jądra Poissona dla kuli, twierdzenie Almansiego czy wreszcie twierdzenie Siciaka o przedłużaniu funkcji harmonicznych z kuli rzeczywistej na kulę Liego. Podamy przy tym lemat o przedłużaniu funkcji poliharmonicznych z kuli rzeczywistej na każdą kulę obróconą o dowolny kąt.

1 Pojęcia wstępne

Niech $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, wtedy normę rzeczywistą z x definiujemy następująco

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}.$$

Kulą i sferą rzeczywistą o środku $a \in \mathbb{R}^n$ i promieniu $r > 0$ będziemy nazywać odpowiednio zbiory

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\},$$

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}.$$

Przyjmujemy przy tym oznaczenia dla kuli i sfery jednostkowej: $B := B(0,1)$ oraz $S = S(0,1)$. Przez Ω_n, ω_n oznaczamy odpowiednio objętość kuli B i pole powierzchni sfery S, przy czym

$$\Omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}, \quad \omega_n = n\Omega_n.$$

Niech teraz $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, wtedy normę zespoloną dla z określamy w następujący sposób:

$$||z|| = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|_{\mathbb{C}}^2\right)^{1/2},$$

gdzie $|z_j|_{\mathbb{C}}^2 = z_j\overline{z}_j$.

W naszej pracy będziemy często używać rzeczywistej normy dla wektorów $z \in \mathbb{C}^n$:

$$|z| = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j^2\right)^{1/2} \quad \text{dla} \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

przy czym przez pierwiastek kwadratowy w powyższym wyrażeniu rozumiemy algebraiczny pierwiastek kwadratowy, gdzie gałąź jest brana wzdłuż nieujemnej osi rzeczywistej. Oczywiście funkcja $|\cdot|$ nie jest normą na $\mathbb{C}^n$, ponieważ przyjmuje wartości zespolone i stąd funkcja $|z-w|$ nie jest metryką na $\mathbb{C}^n$.

W pracy będziemy głównie rozważać wektory zespolone postaci $z = e^{i\varphi}x$, gdzie $x \in \mathbb{R}^n$. W tym przypadku mamy $|e^{i\varphi}x| = |e^{i\varphi}|_{\mathbb{R}}|x|$, gdzie $|e^{i\varphi}|_{\mathbb{R}}$ jest gałęzią pierwiastka $\sqrt{e^{2i\varphi}}$, zdefiniowaną jako

$$|e^{i\varphi}|_{\mathbb{R}} = \sqrt{e^{2i\varphi}} = \begin{cases} e^{i(\varphi+\pi)} = -e^{i\varphi} & \text{dla} \quad \varphi \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ e^{i\varphi} & \text{dla} \quad \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ e^{i(\varphi-\pi)} = -e^{i\varphi} & \text{dla} \quad \varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Dla zbioru $G \subseteq \mathbb{R}^n$ i kąta $\varphi \in \mathbb{R}$ definiujemy zbiór obrócony $e^{i\varphi}G$ następująco

$$e^{i\varphi}G := \{e^{i\varphi}x : x \in G\}.$$

W niniejszej pracy będziemy głównie rozważać funkcje określone na sumie obróconych jednostkowych kul i sfer euklidesowych:

$$\widehat{B}_p := \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} B$$

oraz

$$\widehat{S}_p := \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} S,$$

gdzie $p \in \mathbb{N}$.

Przejdźmy do kolejnych oznaczeń. Niech $G \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Przez $\mathcal{A}(G)$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji analitycznych na G. Mówimy, że $f \in \mathcal{A}(e^{i\varphi}G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_\varphi(x) := f(e^{i\varphi}x) \in \mathcal{A}(G)$. Zbiór postaci

$$\mathcal{A}_\Delta(G) := \{f \in \mathcal{A}(G) : \Delta_x f = 0\}$$

nazywamy przestrzenią funkcji harmonicznych na G, gdzie operator Δ_x oznacza laplasjan na $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Analogicznie definiujemy rodzinę $\mathcal{A}_\Delta(e^{i\varphi}G)$ funkcji harmonicznych na $e^{i\varphi}G$. Zauważmy, że $f \in \mathcal{A}_\Delta(e^{i\varphi}G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_\varphi \in \mathcal{A}_\Delta(G)$.

Zamieniając teraz w powyższych definicjach operator Laplace'a Δ_x przez jego p-tą iterację Δ_x^p, tj. operator zdefiniowany indukcyjnie

$$\begin{cases} \Delta_x^p = \Delta_x^{p-1}(\Delta_x) \quad \text{dla} \quad p \geqslant 2 \\ \Delta_x^1 = \Delta_x, \end{cases}$$

definiujemy kolejno przestrzenie funkcji poliharmonicznych rzędu p, tj. $\mathcal{A}_{\Delta^p}(G)$, $\mathcal{A}_{\Delta^p}(e^{i\varphi}G)$.

Niech teraz U będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}^n$. Oznaczmy przez $\mathcal{O}(U)$ zbiór funkcji holomorficznych na U. Zbiór postaci

$$\mathcal{O}_\Delta(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \colon \Delta_z f = 0\}$$

nazywamy przestrzenią funkcji harmonicznych zespolonych na U, gdzie Δ_z oznacza zespolony operator Laplace'a na $\mathbb{C}^n$:

$$\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial z_n^2}.$$

Podobnie jak $\mathcal{A}_{\Delta^p}(G)$ wprowadzamy przestrzeń $\mathcal{O}_{\Delta^p}(U)$ funkcji poliharmonicznych zespolonych rzędu p na U. Jeśli nie będzie to powodowało żadnych nieporozumień, to zamiast Δ_x, Δ_z będziemy pisać po prostu Δ.

Zauważmy, że $f \in \mathcal{A}(G)$ (odpowiednio $f \in \mathcal{A}_\Delta(G)$, $f \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(G)$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otwarte zespolone otoczenie U dla zbioru G (tzn. U jest otwarty na $\mathbb{C}^n$ oraz $G \subseteq U$) takie, że f przedłuża się do holomorficznej funkcji $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ (odpowiednio $\widetilde{f} \in \mathcal{O}_\Delta(U)$, $\widetilde{f} \in \mathcal{O}_{\Delta^p}(U)$). Mówimy wtedy, że funkcja f przedłuża się holomorficznie do funkcji $\widetilde{f}$, którą nazywamy *zespolonym, holomorficznym* (odpowiednio *harmonicznym, poliharmonicznym*) *przedłużeniem funkcji* f. Oczywiście taka sama własność jak powyżej zachodzi jeśli zastąpimy zbiór rzeczywisty $G \subset \mathbb{R}^n$ przez zbiór obrócony $e^{i\varphi}G$.

Niech G będzie dowolnym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}^n$ albo $\mathbb{C}^n$. Przez $\mathcal{C}(G)$ oznaczamy przestrzeń funkcji ciągłych na G.

Niech teraz G będzie otwartym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}^n$ albo $\mathbb{C}^n$ oraz $k > 0$ będzie liczbą naturalną. Przez $\mathcal{C}^k(G)$ będziemy oznaczać przestrzeń funkcji k-krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły na G.

2 Kula i sfera Liego

Przyjmijmy następujące definicje.

Definicja 1.1. *Kulą Liego* o promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór postaci

$$LB(0,r) := \{z \in \mathbb{C}^n : L(z) < r\},$$

gdzie $L(z)$ oznacza *normę Liego* określoną wzorem

$$L(z) = \sqrt{||z||^2 + \sqrt{||z||^4 - |z^2|^2_{\mathbb{C}}}},$$

przy czym $z^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$.

Sferą Liego o promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór postaci

$$LS(0,r) := \{e^{i\varphi}x : \varphi \in \mathbb{R},\ x \in S(0,r)\}.$$

Przyjmujemy przy tym oznaczenie $LB := LB(0,1)$ oraz $LS = LS(0,1)$.

Łatwo zauważyć, że $LS \subset \partial LB$. Istotnie, jeśli $z = e^{i\varphi}x, x \in S$, to

$$\begin{aligned} L(z) &= L(e^{i\varphi}x) = \sqrt{||e^{i\varphi}x||^2 + \sqrt{||e^{i\varphi}x||^4 - |(e^{i\varphi}x)^2|^2_{\mathbb{C}}}} \\ &= \sqrt{||x||^2 + \sqrt{||x||^4 - |x^2|^2_{\mathbb{C}}}} = \sqrt{|x|^2 + \sqrt{|x|^4 - |x|^4}} = 1, \end{aligned}$$

bo $|x^2|_{\mathbb{C}} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = |x|^2 = 1$.

Należy jednak zanotować, że inkluzja w drugą stronę nie zachodzi, tzn. $LS \neq \partial LB$.

Przykład 1.1. Niech $n = 2$, wówczas norma Liego dla wektora $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ ma postać (por. [8]):

$$L(z) = L(z_1, z_2) = \max |z_1 \pm i z_2|_{\mathbb{C}}.$$

Weźmy wektor $z = (z_1, z_2)$, gdzie $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{3}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}$. Wtedy

$$|z_1 + i z_2|_{\mathbb{C}} = \left|\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right|_{\mathbb{C}} = \left|e^{\frac{i\pi}{3}}\right|_{\mathbb{C}} = 1,$$

$$|z_1 - i z_2|_{\mathbb{C}} = \left|\frac{1}{2} + i\frac{4 - 3\sqrt{3}}{6}\right|_{\mathbb{C}} = \frac{\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}}{3} \approx 0,54 < 1.$$

W konsekwencji dostajemy, że $L(z) = 1$, czyli $z \in \partial LB$. Przypuśćmy, że $z \in LS$, wtedy istnieją $x_1, x_2 \in S$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$ takie, że $(z_1, z_2) = (e^{i\varphi}x_1, e^{i\varphi}x_2)$. Zatem

$$x_1^2 + x_2^2 = |x_1|_{\mathbb{C}}^2 + |x_2|_{\mathbb{C}}^2 = |e^{i\varphi}x_1|_{\mathbb{C}}^2 + |e^{i\varphi}x_2|_{\mathbb{C}}^2 = |z_1|_{\mathbb{C}}^2 + |z_2|_{\mathbb{C}}^2 = \frac{11 - 3\sqrt{3}}{9} \neq 1,$$

skąd otrzymujemy sprzeczność, bo z założenia $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Z powyższych rozważań wynika, że sfera Liego nie jest całym brzegiem kuli Liego, ale tylko jego częścią. Nie bez powodu jednak rozważa się taki zbiór. Otóż sfera Liego jest brzegiem Szyłowa dla kuli Liego, która z kolei jest jednym z czterech tzw. zbiorów Cartana (zob. [14]).

Definicja 1.2. ([7], str. 203) Mówimy, że zbiór D jest *brzegiem Szyłowa* dla zbioru $U \subset \mathbb{C}^n$, jeśli D jest najmniejszym, w sensie zawierania, domkniętym podzbiorem zbioru ∂U takim, że dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{O}(U) \cap \mathcal{C}(\overline{U})$ zachodzi zasada maksimum, tzn.:

$$\max_{z \in U} |f(z)|_{\mathbb{C}} = \max_{z \in D} |f(z)|_{\mathbb{C}}$$

Na koniec zauważmy jeszcze, że zbiory $B, \widehat{B}_p, LB$ oraz $S, \widehat{S}_p, LS$ są podzbiorami przestrzeni $\mathbb{C}^n$, przy czym zachodzą natychmiastowe inkluzje

$$B = \widehat{B}_1 \subsetneq \widehat{B}_p \subsetneq \widehat{B}_{kp} \subsetneq LB$$

oraz

$$S = \widehat{S}_1 \subsetneq \widehat{S}_p \subsetneq \widehat{S}_{kp} \subsetneq LS$$

dla dowolnego $k, p \in \mathbb{N}$, $k, p > 1$.

3 Przedłużenie analityczne

Przypomnijmy kilka znanych faktów dotyczących funkcji harmonicznych.

Stwierdzenie 1.1. ([2, Theorem 1.21]) Jeśli $f \in \mathcal{A}_\Delta(B) \cap \mathcal{C}(\overline{B})$, to

$$f(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S P(x,\zeta) f(\zeta) dS(\zeta),$$

gdzie funkcja

$$P(x,\zeta) = \frac{1-x^2}{|x-\zeta|^n}$$

jest *harmonicznym jądrem Poissona* dla kuli B, zaś $dS(\zeta)$ oznacza miarę powierzchniową na S.

Stwierdzenie 1.2. ([2, Theorem 1.20]) Jądro Poissona ma następujące własności:

(a) funkcja $P(\cdot,\zeta)$ jest harmoniczna na B dla dowolnego $\zeta \in S$;

(b) dla dowolnego $x \in B$ jest

$$\frac{1}{\omega_n} \int\limits_S P(x,\zeta) dS(\zeta) = 1;$$

(c) $P(x,\zeta) > 0$ dla dowolnego $x \in B, \zeta \in S$;

(d) niech $\delta > 0$, wtedy dla dowolnego $\eta \in S$ jest

$$\int\limits_{|\zeta-\eta|>\delta} P(x,\zeta) dS(\zeta) \to 0 \quad \text{gdy} \quad x \to \eta.$$

Stwierdzenie 1.3 (Rozwinięcie Almansiego, [1, Proposition 1.2, Proposition 1.3])**.** Funkcja $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją jednoznacznie określone funkcje $h_0, h_1, ..., h_{p-1} \in \mathcal{A}_\Delta(B)$ takie, że

$$u(x) = h_0(x) + |x|^2 h_1(x) + ... + |x|^{2(p-1)} h_{p-1}(x) \quad \text{dla} \quad x \in B. \tag{1.1}$$

Dowód. Dowód, pochodzący z monografii [1], przeprowadzimy metodą indukcji po p. Jeśli $p = 1$, to teza jest oczywista. Załóżmy, że teza twierdzenia zachodzi dla $p = q-1, q > 1$. Niech u będzie funkcją poliharmoniczną rzędu q na B. Ponieważ Δu jest funkcją poliharmoniczną rzędu $q-1$, to z założenia indukcyjnego istnieją jednoznacznie określone funkcje

g_k, $k = 0, 1, ..., q-2$, harmoniczne na B takie, że

$$\Delta u = \sum_{k=0}^{q-2} \varrho^{2k} g_k(x) = \sum_{k=1}^{q-1} \varrho^{2k-2} g_{k-1}(x)$$

gdzie $\varrho = |x|$. Dla żądanych funkcji harmonicznych $h_0, h_1, ..., h_{p-1}$ zatem jest

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \sum_{k=1}^{q-1} \varrho^{2k-2} g_{k-1}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{q-1} \Delta\left(\varrho^{2k} h_k(x)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{q-1} \varrho^{2k-2}\left[4k\left(k-1+\frac{n}{2}\right)h_k + 4k\varrho\frac{\partial h_k}{\partial \varrho}\right], \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdyż $\Delta(fg) = \Delta f + 2\nabla f \nabla g + \Delta g$ dla dowolnych funkcji klasy $\mathcal{C}^2(B)$. Z jednoznaczności rozwinięcia Almansiego dla funkcji Δu wystarczy znaleźć funkcje harmoniczne h_k na B spełniające równanie

$$4k\left(k-1+\frac{n}{2}\right)h_k + 4k\varrho\frac{\partial h_k}{\partial \varrho} = g_{k-1}$$

dla $k = 1, ..., q-1$. Mnożąc obie strony ostatniej równości przez $\varrho^{k-2+n/2}$ i wykonując odpowiedni rachunek dostajemy

$$\left(k-1+\frac{n}{2}\right)\varrho^{k-2+n/2}h_k + \varrho^{k-1+n/2}\frac{\partial h_k}{\partial \varrho} = \frac{1}{4k}\varrho^{k-2+n/2}g_{k-1},$$

czyli

$$\left(\varrho^{k-1+n/2}h_k\right)'_{\varrho} = \frac{1}{4k}\varrho^{k-2+n/2}g_{k-1}.$$

Po scałkowaniu ostatniej równości otrzymujemy

$$\varrho^{k-1+n/2}h_k(\varrho\theta) = \frac{1}{4k}\int_0^{\varrho} t^{k-2+n/2}g_{k-1}(t\theta)dt,$$

gdzie $x = \varrho\theta \in B, \theta \in S$, dokonując pod znakiem całki podstawienia $\tau = \varrho^{-1}t$ otrzymamy wówczas

$$\varrho^{k-1+n/2}h_k(x) = \frac{1}{4k}\int_0^1 \varrho^{k-2+n/2}\tau^{k-2+n/2}\varrho g_{k-1}(\tau x)d\tau,$$

skąd ostatecznie mamy dla dowolnego $k = 1, 2, ..., q-1$

$$h_k(x) = \frac{1}{4k}\int_0^1 \tau^{k-2+n/2}g_{k-1}(\tau x)d\tau.$$

Różniczkując pod znakiem całki w ostatniej równości wnioskujemy, że funkcje h_k są harmoniczne na B. Kładąc

$$h_0(x) = u(x) - \sum_{k=1}^{q-1}|x|^{2k}h_k(x)$$

łatwo dostajemy, że funkcja h_0 jest również harmoniczna na B na mocy (1.2). $\square$

Korzystając ze Stwierdzenia 1.1 i z rozwinięcia Almansiego udowodnimy następujący lemat o przedłużaniu funkcji poliharmonicznych z kuli B na kule obrócone.

Lemat 1.1. Niech $\varphi \in \mathbb{R}$ oraz $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B)$, wówczas u przedłuża się analitycznie do $u_\varphi \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(e^{i\varphi}B)$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $u \in \mathcal{A}_\Delta(B)$. Niech $r \in (0,1)$ będzie ustalone oraz niech $u_r(x) := u(rx)$ dla $x \in B$. Zauważmy, że u_r jest harmoniczna na B i ciągła na jego domknięciu $\overline{B}$. Zatem, na mocy Stwierdzenia 1.1, dla dowolnego $x \in B$ mamy

$$u_r(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n} u(r\zeta)\, dS(\zeta). \tag{1.3}$$

Oznaczmy przez $u_{r,\varphi}(x)$ funkcję zdefiniowaną przez prawą stronę równania (1.3) dla $x \in e^{i\varphi}B$. Pokażemy, że tak określona funkcja jest dobrze określonym analitycznym przedłużeniem funkcji u_r na zbiorze $e^{i\varphi}B$ oraz $u_{r,\varphi} \in \mathcal{A}_\Delta(e^{i\varphi}B)$. W tym celu rozważmy funkcję pomocniczą v_r na B określoną wzorem

$$v_r(x) := u_{r,\varphi}(e^{i\varphi}x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{1-e^{2i\varphi}|x|^2}{|e^{i\varphi}x-\zeta|^n} u(r\zeta)\, dS(\zeta).$$

Musimy wykazać, że v_r jest dobrze określona oraz analityczna w sensie rzeczywistym na B. W tym celu wystarczy udowodnić, że istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że

$$\inf_{\zeta \in S} \operatorname{dist}\left(|e^{i\varphi}x-\zeta|^n, 0\right) \geqslant \varepsilon.$$

Ze zwartości S jest to równoważne warunkowi

$$|e^{i\varphi}x-\zeta|^n \neq 0 \quad \text{dla} \quad \zeta \in S. \tag{1.4}$$

Ponieważ $|\cdot|$ nie jest normą na $\mathbb{C}^n$, to zauważmy, że nie wystarczy pokazać, że $e^{i\varphi}x \neq \zeta$. Załóżmy, że warunek (1.4) nie zachodzi, tzn. $|e^{i\varphi}x-\zeta|^n = 0$ dla pewnego $\zeta \in S$. Wtedy

$$\sum_{k=1}^n \left(e^{i\varphi}x_k - \zeta_k\right)^2 = 0$$

lub równoważnie

$$e^{i\varphi}|x|^2 + e^{-i\varphi} - 2x\zeta = 0.$$

Ponieważ część urojona lewej strony powyższej równości musi być równa 0 więc $|x| = 1$ dla $\varphi \neq k\pi$ – sprzeczność, bo $x \in B$. Jeśli $\varphi = k\pi$, to dla $k = 0, 2, 4, \ldots$ otrzymamy

$|e^{i\varphi}x - \zeta| = |x - \zeta| \neq 0$ zaś dla $k = 1, 3, 5, \ldots$ dostajemy $|e^{i\varphi}x - \zeta| = |x + \zeta| \neq 0$, co również daje sprzeczność.

Z powyższych rozważań wnioskujemy, że $u_{r,\varphi} \in \mathcal{A}(e^{i\varphi}B)$. Ponadto, jeśli $\widetilde{u}_r$ oraz $\widetilde{u}_{r,\varphi}$ oznaczają zespolone przedłużenia holomorficzne odpowiednio funkcji u_r oraz $u_{r,\varphi}$, to z (1.3) istnieje zespolone otoczenie U zera, takie, że $\widetilde{u}_r(z) = \widetilde{u}_{r,\varphi}(z)$ dla $z \in U$. Oznacza to, że u_r przedłuża się analitycznie do funkcji $u_{r,\varphi} \in \mathcal{A}(e^{i\varphi}B)$ zaś u przedłuża się analitycznie do funkcji $u_\varphi \in \mathcal{A}(e^{i\varphi}B(0,r))$. Zatem Δu także jest analitycznie przedłużalny do $\Delta u_\varphi \in \mathcal{A}(e^{i\varphi}B(0,r))$. Z drugiej strony, ponieważ $\Delta u = 0$ na B, to z jednoznaczności przedłużenia analitycznego również musi być $\Delta u_\varphi = 0$ na $e^{i\varphi}B(0,r)$. W konsekwencji otrzymujemy, że $u_\varphi \in \mathcal{A}_\Delta(e^{i\varphi}B(0,r))$. Ponieważ to zachodzi dla dowolnego $r \in (0,1)$, to funkcja $u_\varphi \in \mathcal{A}_\Delta(e^{i\varphi}B)$ jest analitycznym przedłużeniem funkcji u.

Jeśli więc u jest funkcją poliharmoniczną na B, to ze Stwierdzenia 1.3 oraz z powyższych rozważań wnioskujemy, że u_φ jest również poliharmoniczna na $e^{i\varphi}B$. $\square$

Uwaga 1.1. Podobnie możemy pokazać, że jeśli $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}B(a,r)$, to u przedłuża się analitycznie do $u_\varphi \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(a + e^{i\varphi}B(0,r))$.

Lemat 1.1 mówi, że każda funkcja poliharmoniczna na kuli B przedłuża się analitycznie na kulę obróconą o dowolny kąt. Kolejne twierdzenie mówi z kolei o przedłużaniu funkcji harmonicznych na większy zbiór – kulę Liego.

Stwierdzenie 1.4 (Twierdzenie Siciaka [26, Theorem D], także [9, Theorem 1] i [21, Theorem 3.38])**.** Kula Liego $LB(0,r)$ jest harmoniczną otoczką zbioru $B(0,r)$, tzn. każda funkcja harmoniczna na $B(0,r)$ przedłuża się holomorficznie na kulę Liego $LB(0,r)$.

Oczywiście w powyższym stwierdzeniu zamiast funkcji harmonicznej możemy wstawić funkcję poliharmoniczną dowolnego rzędu na mocy rozwinięcia Almansiego. Zanotujmy jeszcze, że Stwierdzenie 1.4 implikuje Lemat 1.1, łatwo bowiem zauważyć, że $e^{i\varphi}B$ jest zawarty w kuli Liego LB dla dowolnego $\varphi \in \mathbb{R}$. Istotnie, niech $x \in B$, wtedy

$$L(e^{i\varphi}x) = \sqrt{|x|^2 + \sqrt{|x|^4 - |e^{i\varphi}xe^{i\varphi}x|^2_{\mathbb{C}}}} = |x| < 1.$$

Z powyższego rachunku, z twierdzenia Siciaka i z twierdzenia Almansiego otrzymujemy więc od razu Lemat 1.1 a także następujący wniosek:

Wniosek 1.1. Jeśli $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B)$, to $u \in \mathcal{O}_{\Delta^p}(LB)$ (tzn. u przedłuża się holomorficznie na kulę Liego).

Na zakończenie zanotujmy jeszcze ogólniejszą wersję Stwierdzenia 1.1:

Stwierdzenie 1.5 (Theorem 3 (Poisson formula) [21])**.** Jeśli $f \in \mathcal{O}_\Delta(LB) \cap \mathcal{C}(\overline{LB})$, to

$$f(z) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \frac{1 - |z|^2|\overline{\zeta}|^2}{(z^2\overline{\zeta}^2 - 2x\overline{\zeta} + 1)^{n/2}} f(\zeta) dS(\zeta)$$

dla $z \in LB$.

Rozdział 2

Zagadnienie Dirichleta dla funkcji poliharmonicznych

W rozdziale tym będziemy rozważać zagadnienie Dirichleta, o którym wspomnieliśmy we wstępie. Najpierw udowodnimy wersję twierdzenia Almansiego wygodną do znalezienia rozwiązania wspomnianego problemu, dzięki temu nasze zagadnienie sprowadzimy do zagadnień Dirichleta dla funkcji harmonicznych. Korzystając następnie ze Stwierdzenia 1.1 otrzymamy rozwiązanie naszego zagadnienia. W oparciu o to rozwiązanie wyprowadzimy kilka wniosków w tym ważną własność wartości średniej dla funkcji poliharmonicznych, o której również już mówiliśmy we wstępie.

1 Rozwiązanie zagadnienia Dirichleta

Rozważmy następujące zagadnienie Dirichleta:

Znaleźć funkcję poliharmoniczną u rzędu p na zbiorze $\widehat{B}_p$, która jest ciągła na $\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p$ oraz spełnia następujące warunki brzegowe

$$u(x) = f_k(x) \quad \text{dla} \quad x \in e^{\frac{k\pi i}{p}} S,$$

gdzie f_k są danymi funkcjami ciągłymi na $e^{\frac{k\pi i}{p}} S$ dla $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

Zagadnienia takie jak to będziemy zapisywać symbolicznie:

$$\begin{cases} \Delta^p u(x) = 0, & x \in \widehat{B}_p, \\ u(x) = f_k(x), & x \in e^{\frac{k\pi i}{p}} S, \ k = 0, 1, ..., p-1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dla $p = 1$ widzimy, że powyższe zagadnienie jest klasycznym zagadnieniem Dirichleta dla funkcji harmonicznych:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in B, \\ u(x) = f(x), & x \in S. \end{cases}$$

Zagadnienie to jak wiemy (por. Stwierdzenie 1.1) ma jednoznaczne rozwiązanie dane całką Poissona:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \frac{1 - |x|^2}{|x - \zeta|^n} f(\zeta)\, dS(\zeta).$$

Przykład 2.1. Rozważmy zagadnienie (2.1) w szczególnym ale trywialnym przypadku, gdy $p = 2, n = 1$. Będziemy tutaj szukali funkcji biharmonicznej, tj. poliharmonicznej rzędu 2, spełniającej równanie

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) = 0$$

dla $x \in (-1, 1) \cup (-i, i)$. Warunki brzegowe są określone tutaj następująco:

$$\begin{cases} u(1) = a, \\ u(-1) = b, \\ u(i) = c, \\ u(-i) = d, \end{cases} \tag{2.2}$$

gdzie współczynniki $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ są dane. Wiadomo, że rozwiązanie równania ma postać wielomianu stopnia co najwyżej 3:

$$u(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

gdzie $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ to szukane współczynniki. Nakładając warunki brzegowe (2.2) na funkcję u dostajemy układ równań liniowych, z którego łatwo wyznaczamy współczynniki A, B, C, D. Widzimy zatem, że w tym konkretnym przypadku nasze zagadnienie Dirichleta ma rozwiązanie i do tego jednoznaczne.

Zanim przejdziemy do rozwiązania zagadnienia (2.1), wyprowadzimy najpierw postać funkcji poliharmonicznych wygodną do znalezienia rozwiązania tego zagadnienia.

Lemat 2.1. Funkcja $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B}_p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją jednoznacznie określone funkcje $g_0, g_1, \ldots, g_{p-1} \in \mathcal{A}_\Delta(\widehat{B}_p)$ takie, że

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1-|x|^{2p}}{1-e^{\frac{2k\pi i}{p}}|x|^2} g_k(x) \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p. \tag{2.3}$$

Dowód. Zauważmy, że na mocy Lematu 1.1 wystarczy udowodnić, że teza zachodzi dla $x \in B$. Wykażemy najpierw implikację w lewą stronę.

Niech dana będzie funkcja u określona wzorem (2.3), gdzie funkcje g_k są harmoniczne na B. Oznaczmy przez $a_k = a_k(|x|^2)$ współczynniki stojące przy funkcjach g_k dla $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Łatwo zauważyć, że

$$a_k = 1 + e^{\frac{2k\pi i}{p}}|x|^2 + \cdots + e^{\frac{2k(p-1)\pi i}{p}}|x|^{2(p-1)} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Podstawiając powyższe do (2.3) otrzymamy

$$\begin{aligned} u(x) \;=\; & g_0(x) + g_1(x) + \cdots + g_{p-1}(x) \\ & + |x|^2 \left[g_0(x) + e^{\frac{2\pi i}{p}} g_1(x) + \cdots + e^{\frac{2(p-1)\pi i}{p}} g_{p-1}(x) \right] \\ & \ldots \\ & + |x|^{2(p-1)} \left[g_0(x) + e^{\frac{2(p-1)\pi i}{p}} g_1(x) + \cdots + e^{\frac{2(p-1)^2\pi i}{p}} g_{p-1}(x) \right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

dla $x \in B$. Ponieważ wyrażenia stojące przy $|x|^{2k}$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, są funkcjami harmonicznymi, to na mocy Stwierdzenia 1.3 wnioskujemy, że rzeczywiście u jest poliharmoniczna na B.

Udowodnimy teraz implikację w drugą stronę. Niech $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B_p})$. Wykażemy, że istnieją jednoznacznie określone funkcje $g_0, g_1, \ldots, g_{p-1} \in \mathcal{A}_\Delta(\widehat{B_p})$ spełniające (2.3) lub równoważnie spełniające (2.4). Na mocy Stwierdzenia 1.3 istnieją funkcje $h_k \in \mathcal{A}_\Delta(B)$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$ takie, że

$$u(x) = h_0(x) + |x|^2 h_1(x) + \cdots + |x|^{2(p-1)} h_{p-1}(x). \tag{2.5}$$

Podstawiając (2.4) do (2.5) i porównując odpowiednie współczynniki stojące przy kolejnych potęgach $|x|^2$, otrzymamy następujący układ równań liniowych:

$$\begin{cases} g_0(x) + g_1(x) + \cdots + g_{p-1}(x) = h_0(x) \\ g_0(x) + e^{\frac{2\pi i}{p}} g_1(x) + \cdots + e^{\frac{2(p-1)\pi i}{p}} g_{p-1}(x) = h_1(x) \\ \ldots \\ g_0(x) + e^{\frac{2(p-1)\pi i}{p}} g_1(x) + \cdots + e^{\frac{2(p-1)^2\pi i}{p}} g_{p-1}(x) = h_{p-1}(x). \end{cases}$$

Macierz podstawowa powyższego układu ma postać

$$A = \left[e^{\frac{2kl\pi i}{p}} \right]_{k,l=0}^{p-1}.$$

Łatwo zauważyć, że A jest macierzą Vandermonde'a, zatem jej wyznacznik jest równy (zobacz [19, p. 9]):

$$\det A = \prod_{0 \leqslant k < l \leqslant p-1} \left(e^{\frac{2l\pi i}{p}} - e^{\frac{2k\pi i}{p}} \right).$$

Zauważmy dalej, że $e^{\frac{k\pi i}{p}} \neq e^{\frac{l\pi i}{p}}$ dla dowolnych liczb całkowitych k, l takich, że $k \neq l + mp$ dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, zatem A jest nieosobliwa. Stąd otrzymujemy wzór

$$G = A^{-1} H, \tag{2.6}$$

gdzie

$$G = \begin{bmatrix} g_0(x) \\ \vdots \\ g_{p-1}(x) \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h_0(x) \\ \vdots \\ h_{p-1}(x) \end{bmatrix}.$$

Z powyższych rozważań wynika zatem, że jeśli $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B)$ z rozwinięciem Almansiego (2.5), to na mocy (2.6) istnieją jednoznacznie określone funkcje $g_k \in \mathcal{A}_{\Delta}(B)$ takie, że zachodzi wzór (2.3), o co chodziło. $\square$

Zanim przejdziemy do podania głównego wyniku tego rozdziału, wykorzystamy postać podaną w Lemacie 2.1 do wyznaczenia rozwiązania zagadnienia Dirichleta na przykładzie.

Przykład 2.2. Niech $B \subset \mathbb{R}^2$ będzie kulą jednostkową. Rozważmy zagadnienie Dirichleta postaci

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x,y) = 0, & (x,y) \in B \cup iB, \\ u(x,y) = 2(x^2 + y), & (x,y) \in S, \\ u(x,y) = 2x + 2y, & (x,y) \in iS. \end{cases} \tag{2.7}$$

Ponieważ każda funkcja harmoniczna na $B \subset \mathbb{R}^2$ da się przedstawić w postaci szeregu Fouriera, to zgodnie z Lematem 2.1, rozwiązania będziemy szukać w postaci szeregu:

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \left[\Big((1+r^2) a_k + (1-r^2) b_k \Big) \cos(\varphi k) + \Big((1+r^2) c_k + (1-r^2) d_k \Big) \sin(\varphi k) \right], \tag{2.8}$$

gdzie

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Dalej jest

$$u(x,y)|_S = 1 + \cos 2\varphi + 2\sin\varphi,$$

$$u(x,y)|_{iS} = 2\cos\varphi + 2\sin\varphi.$$

Wstawiając powyższe do (2.8) i porównując odpowiednie współczynniki dostajemy, że $a_0 = 1/2, a_2 = 1/2, b_1 = 1, c_1 = 1, d_1 = 1$, zaś pozostałe współczynniki równe są 0. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2}(1+r^2) + r(1-r^2)\cos\varphi + 2r\sin\varphi + \frac{1}{2}r^2(1+r^2)\cos 2\varphi \\ &= \frac{1}{2}(1+x^2+y^2) + x(1-x^2-y^2) + 2y + \frac{1}{2}(x^2-y^2)(1+x^2+y^2) \\ &= \frac{1}{2} + x + 2y + x^2 - xy^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4. \end{aligned}$$

Prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie 2.1 (Rozwiązanie zagadnienia Dirichleta)**.** Jeśli zagadnienie Dirichleta (2.1) posiada rozwiązanie, to jest ono jednoznaczne i wyraża się wzorem

$$u(x) = \frac{1}{p\omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_S \frac{1-|x|^{2p}}{|e^{\frac{-k\pi i}{p}}x-\zeta|^n} f_k(e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta)\, dS(\zeta). \tag{2.9}$$

Dowód. Niech funkcja u będzie rozwiązaniem zagadnienia (2.1). Zgodnie z Lematem 2.1 istnieją funkcje $g_k \in \mathcal{A}_\Delta(\widehat{B}_p), k = 0, 1, \ldots, p-1$ takie, że

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1-|x|^{2p}}{1-e^{\frac{2k\pi i}{p}}|x|^2} g_k(x) \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p. \tag{2.10}$$

Niech a_k, będą takie jak w dowodzie Lematu 2.1. Nietrudno zauważyć, że dla wszystkich $k, l = 1, \ldots, p$ oraz dla dowolnego $x \in S$ jest

$$a_l(|e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}}x|^2) = \sum_{j=0}^{p-1} e^{\frac{2jl\pi i}{p}} e^{\frac{2j(p-k)\pi i}{p}}|x|^{2j} = \begin{cases} p \text{ dla } k = l, \\ 0 \text{ dla } k \neq l, \end{cases} \tag{2.11}$$

przy czym mamy tutaj $a_p = a_0$. Ponieważ u jest z założenia funkcją ciągłą na $\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p$, to możemy nałożyć warunki brzegowe z (2.1) na (2.10), otrzymujemy wtedy na mocy (2.11):

$$g_k\left(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}}x\right) = \frac{1}{p}u\left(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}}x\right) = \frac{1}{p}f_{p-k}\left(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}}x\right)$$

dla $x \in S$ oraz $k = 1, 2, \ldots, p$, przy czym $g_p := g_0$. Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$\widehat{g}_k(x) := g_k(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}} x) \qquad \text{dla} \quad x \in B, \quad k = 1, 2, \ldots, p \tag{2.12}$$

oraz

$$\widehat{f}_k(x) := f_k(e^{\frac{k\pi i}{p}} x) \qquad \text{dla} \quad x \in S, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{2.13}$$

Łatwo zauważyć, że funkcje $\widehat{g}_k$ są harmoniczne na B, zaś funkcje $\widehat{f}_k$ są ciągłe na S. W ten sposób otrzymujemy p-zagadnień Dirichleta dla funkcji harmonicznych $\widehat{g}_k$:

$$\begin{cases} \Delta \widehat{g}_k(x) = 0, & x \in B, \\ \widehat{g}_k(x) = \frac{1}{p} \widehat{f}_{p-k}(x), & x \in S \end{cases}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, p$.

Korzystając ze Stwierdzenia 1.1 wnioskujemy, że istnieją rozwiązania powyższych zagadnień i mają one postać:

$$\widehat{g}_k(x) = \frac{1}{p\omega_n} \int\limits_S \frac{1 - |x|^2}{|x - \zeta|^n} \widehat{f}_{p-k}(\zeta)\, dS(\zeta)$$

dla $x \in B$ oraz $k = 1, 2, \ldots, p$.

Uwzględniając oznaczenia (2.12) i (2.13) dostajemy

$$g_k\left(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}} x\right) = \frac{1}{p\omega_n} \int\limits_S \frac{1 - |x|^2}{|x - \zeta|^n} f_{p-k}\left(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}} \zeta\right) dS(\zeta)$$

dla $x \in B$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Dlatego też

$$g_k(x) = \frac{1}{p\omega_n} \int\limits_S \frac{1 - e^{\frac{2(k-p)\pi i}{p}} |x|^2}{|e^{\frac{(k-p)\pi i}{p}} x - \zeta|^n} f_{p-k}\left(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}} \zeta\right) dS(\zeta)$$

dla $x \in e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}} B$ oraz $k = 1, 2, \ldots, p$. Przedłużając otrzymane funkcje g_k do zbioru $\widehat{B}_p$ i podstawiając je do wzoru (2.3) otrzymamy

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=1}^{p} \frac{1 - |x|^{2p}}{1 - e^{\frac{2k\pi i}{p}} |x|^2} \int\limits_S \frac{1 - e^{\frac{2(k-p)\pi i}{p}} |x|^2}{|e^{\frac{(k-p)\pi i}{p}} x - \zeta|^n} f_{p-k}\left(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}} \zeta\right) dS(\zeta) \\ &= \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=1}^{p} \int\limits_S \frac{1 - |x|^{2p}}{|e^{\frac{(k-p)\pi i}{p}} x - \zeta|^n} f_{p-k}\left(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}} \zeta\right) dS(\zeta). \end{aligned}$$

Biorąc $m = p - k$ otrzymamy żądany wzór (2.9). Jednoznaczność rozwiązania (2.9) wynika wprost z jednoznaczności rozwinięcia podanego w Lemacie 2.1 oraz z jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Dirichleta dla funkcji harmonicznych. □

Zauważmy, że Twierdzenie 2.1 możemy zapisać w takiej postaci (por. Stwierdzenie 1.1 i Stwierdzenie 1.5):

Twierdzenie 2.2. Jeśli $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B}_p) \cap \mathcal{C}(\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p)$, to

$$u\,(x) = \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int\limits_S \frac{1-|x|^{2p}}{|e^{\frac{-k\pi i}{p}} x - \zeta|^n} u(e^{\frac{k\pi i}{p}} \zeta)\, dS(\zeta).$$

Przykład 2.3. W oparciu o Twierdzenie 2.1 rozwiążemy zagadnienie z Przykładu 2.2:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x,y) = 0, & (x,y) \in B \cup iB, \\ u(x,y) = 2(x^2+y), & (x,y) \in S, \\ u(x,y) = 2x + 2y, & (x,y) \in iS. \end{cases}$$

Mamy tutaj $p = 2, n = 2$ oraz $\omega_2 = 2\pi$, zatem rozwiązania będziemy szukać w postaci:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1-(x^2+y^2)^2}{4\pi} \left(\int\limits_S \frac{2(\zeta^2+\eta)}{|(x,y)-(\zeta,\eta)|^2} dS(\zeta,\eta) + \int\limits_S \frac{2(i\zeta + i\eta)}{|-i(x,y)-(\zeta,\eta)|^2} dS(\zeta,\eta) \right) \\ &= \frac{1-(x^2+y^2)^2}{2\pi}(I_1 + I_2), \end{aligned}$$

gdzie

$$I_1 = \int\limits_S \frac{\zeta^2+\eta}{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2} dS(\zeta,\eta),$$

$$I_2 = \int\limits_S \frac{i\zeta + i\eta}{(ix+\zeta)^2+(iy+\eta)^2} dS(\zeta,\eta).$$

Przechodząc do współrzędnych biegunowych:

$$\begin{cases} \zeta = \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \\ \eta = \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}, \end{cases}$$

dostajemy po przekształceniach

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi + \sin\varphi}{1+x^2+y^2-2x\cos\varphi - 2y\sin\varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})^2 - 2i(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})}{1+x^2+y^2-x(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}) + iy(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})} d\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{i(\cos\varphi + \sin\varphi)}{1-x^2-y^2+2ix\cos\varphi + 2iy\sin\varphi} d\varphi \\ &= \frac{i}{2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi} - ie^{i\varphi} + ie^{-i\varphi}}{1-x^2-y^2+ix(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}) + y(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})} d\varphi. \end{aligned}$$

Dokonujemy podstawienia pod znakiem całki: $z = e^{i\varphi}$, wtedy po wykonaniu pewnych rachunków otrzymamy, że

$$I_1 = \frac{1}{4i} \int\limits_{\mathbf{S}} \frac{z^4 - 2iz^3 + 2z^2 + 2iz + 1}{z^2[z^2(-x+iy) + z(1+x^2+y^2) - (x+iy)]} dz,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbf{S}} \frac{(1-i)z^2 + 1 + i}{z^2[z^2(y+ix) + z(1-x^2-y^2) + (-y+ix)]} dz,$$

gdzie $\mathbf{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z|_{\mathbb{C}} = 1\}$ jest sferą zespoloną, tj. jest brzegiem kuli zespolonej $\mathbf{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z|_{\mathbb{C}} < 1\}$. Niech teraz

$$f(z) := \frac{z^4 - 2iz^3 + 2z^2 + 2iz + 1}{z^2[z^2(-x+iy) + z(1+x^2+y^2) - (x+iy)]},$$

$$g(z) := \frac{(1-i)z^2 + 1 + i}{z^2[z^2(y+ix) + z(1-x^2-y^2) + (-y+ix)]}.$$

Punktami osobliwymi funkcji f są $z_1 = 0, z_2 = x + iy$ oraz $z_3 = \frac{1}{x-iy}$. Z kolei punktami osobliwymi dla funkcji g są $z_1 = 0, z_4 = y - ix, z_5 = -\frac{1}{y+ix}$. Ponieważ

$$|z_2|_{\mathbb{C}} = |z_4|_{\mathbb{C}} = (x_2 + y_2)^{1/2} < 1,$$

$$|z_3|_{\mathbb{C}} = |z_5|_{\mathbb{C}} = \left|\frac{1}{x-iy}\right|_{\mathbb{C}} = \frac{1}{x^2+y^2} > 1,$$

bo $(x, y) \in B$, więc tylko $z_1, z_2, z_4 \in \mathbf{B}$. Zatem z twierdzenia Cauchy'ego o residuach wynika, że

$$I_1 = \frac{1}{4i} \cdot 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) \right), \tag{2.14}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=z_1} g(z) + \operatorname*{res}_{z=z_4} g(z) \right). \tag{2.15}$$

Punkt z_1 jest biegunem dwukrotnym funkcji f i jednokrotnym funkcji g, zaś punkty z_2, z_4 są biegunami jednokrotnymi odpowiednio funkcji f i g. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) &= \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz} \frac{z^4 - 2iz^3 + 2z^2 + 2iz + 1}{z^2[z^2(-x+iy) + z(1+x^2+y^2) - (x+iy)]} \\ &= -\frac{1 + x^2 + y^2 + 2i(x+iy)}{(x+iy)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) &= \lim_{z\to z_2} \frac{z^4 - 2iz^3 + 2z^2 + 2iz + 1}{z^2(-x+iy)(z - \frac{1}{x-iy})} \\ &= \frac{(x+iy)^4 - 2i(x+iy)^3 + 2(x+iy)^2 + 2i(x+iy) + 1}{(1-x^2-y^2)(x+iy)^2}. \end{aligned}$$

Stąd i z (2.14) dostajemy po wykonaniu odpowiednich rachunków, że

$$I_1 = \frac{\pi(x^2 - y^2 + 2y + 1)}{1 - x^2 - y^2}.$$

Dalej jest

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} g(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{(1-i)z^2 + 1 + i}{z^2[z^2(y+ix) + z(1-x^2-y^2) + (-y+ix)]} = \frac{1+i}{-y+ix},$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_4} g(z) = \lim_{z \to z_4} \frac{(1-i)z^2 + 1 + i}{z(y+ix)(z + \frac{1}{y+ix})} = \frac{(1-i)(-x^2+y^2-2ixy)}{(y-ix)(1+x^2+y^2)}.$$

Podstawiając powyższe do (2.15) otrzymujemy po wyliczeniach

$$I_2 = \frac{2\pi(x+y)}{1+x^2+y^2}.$$

Ostatecznie więc dostajemy wzór na rozwiązanie naszego zagadnienia

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1-(x^2+y^2)^2}{2\pi}(I_1 + I_2) \\ &= \frac{1}{2}(1+x^2+y^2)(x^2-y^2+2y+1) + (x+y)(1-x^2-y^2) \\ &= \frac{1}{2} + x + 2y + x^2 - xy^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4, \end{aligned}$$

jak oczekiwano.

2 Wnioski z Twierdzenia 2.1

Zanotujemy kilka wniosków z Twierdzenia 2.1. Niech $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$. Rozważmy zagadnienie Dirichleta dla zbioru $\widehat{B}_p(a,r) := a + \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} B(0,r)$ z warunkami brzegowymi postawionymi na zbiorze $\widehat{S}_p(a,r) := a + \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} S(0,r)$, tzn. zagadnienie postaci

$$\begin{cases} \Delta^p u(x) = 0, & x \in \widehat{B}_p(a,r), \\ u(x) = f(x), & x \in \widehat{S}_p(a,r), \end{cases} \tag{2.16}$$

gdzie f jest daną funkcją ciągłą na $\widehat{S}_p(a,r)$.

Wniosek 2.1. Jeśli zagadnienie Dirichleta (2.16) posiada rozwiązanie, to jest ono jednoznaczne i określone wzorem

$$u(x) = \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S \frac{r^{2p} - |x-a|^{2p}}{r^{2p-n} \left| e^{\frac{-k\pi i}{p}}(x-a) - r\zeta \right|^n} f\left(a + re^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta\right) dS(\zeta). \tag{2.17}$$

Dowód. Niech u będzie rozwiązaniem zagadnienia (2.16). Wprowadźmy funkcję pomocniczą v taką, że $v(x) := u(rx+a)$ dla $x \in \widehat{B}_p$ oraz $v(x) = f(rx+a)$ dla $x \in \widehat{S}_p$. Wtedy v jest funkcją poliharmoniczną na $\widehat{B}_p$ oraz funkcją ciągłą na $\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p$. Zatem v jest rozwiązaniem następującego zagadnienia Dirichleta

$$\begin{cases} \Delta^p v(x) = 0, & x \in \widehat{B}_p, \\ v(x) = g(x), & x \in \widehat{S}_p, \end{cases}$$

gdzie $g(x) := f(rx+a), x \in \widehat{S}_p$. Zatem z (2.9) jest

$$v\,(x) = \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S \frac{1-|x|^{2p}}{|e^{\frac{-k\pi i}{p}} x - \zeta|^n} g(e^{\frac{k\pi i}{p}} \zeta) d\zeta$$

dla $x \in \widehat{B}_p$. Ponieważ $u(x) = v(\frac{x-a}{r})$ dla $x \in \widehat{B}_p(a,r)$, to

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S \frac{1 - |\frac{x-a}{r}|^{2p}}{\left| e^{\frac{-k\pi i}{p}} \frac{x-a}{r} - \zeta \right|^n} g\left(e^{\frac{k\pi i}{p}} \zeta \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S \frac{r^{2p} - |x-a|^{2p}}{r^{2p-n} \left| e^{\frac{-k\pi i}{p}} (x-a) - r\zeta \right|^n} f\left(a + r e^{\frac{k\pi i}{p}} \zeta \right) dS(\zeta). \end{aligned}$$

Jednoznaczność powyższego rozwiązania jest oczywista. □

Prostą konsekwencją Wniosku 2.1 jest twierdzenie o wartości średniej dla funkcji poliharmonicznych:

Wniosek 2.2 (Własność wartości średniej)**.** Niech G będzie otwartym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}^n$. Jeśli $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(G)$, to dla dowolnego $a \in \mathbb{R}^n$ oraz $r > 0$ takich, że $\overline{B(a,r)} \subset G$, jest

$$u(a) = \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S u(a + e^{\frac{k\pi i}{p}} r\zeta)\, dS(\zeta). \tag{2.18}$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że u jest poliharmoniczna rzędu p na $B(a, r+\varepsilon)$. Stosując Lemat 1.1 i uwzględniając Uwagę 1.1 do funkcji $v(\zeta) := u(a + (r+\varepsilon)\zeta)$ wnioskujemy, że u jest analityczna na $a + \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} B(0,r)$ oraz ciągła na $a + \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} \overline{B(0,r)}$. Oznacza to, że u jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta (2.16) na $\widehat{B}_p(a,r)$, zatem możemy skorzystać z Wniosku 2.1. Dlatego też kładąc $x = a$ i $f = u$ we wzorze (2.17) natychmiast otrzymujemy żądany wzór (2.18). □

Uwaga 2.1. Własność wartości średniej dla funkcji poliharmonicznych można również uzyskać korzystając z tzw. formuł Pizzettiego dla operatora Δ^p (por. [18, Corollary 3 oraz Remark 6]).

Zajmiemy się teraz zewnętrznym zagadnieniem Dirichleta, które odpowiada wewnętrznemu zagadnieniu (2.1). Tutaj poszukiwana funkcja jest poliharmoniczna na zbiorze $\bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}}(\mathbb{R}^n \setminus B)$ oraz w nieskończoności z warunkami brzegowymi określonymi na $\widehat{S}_p$. Zanim przejdziemy do rozwiązania tego zagadnienia podamy dwa lematy, z których będziemy korzystać.

Lemat 2.2 ([1, Proposition 1.4])**.** Jeśli $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B)$, to p-ta transformacja Kelvina dla funkcji u zdefiniowana wzorem

$$K[u](x) := |x|^{2p-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \tag{2.19}$$

jest funkcją poliharmoniczną rzędu p na $(\mathbb{R}^n \setminus B) \cup \{\infty\}$.

Inwersja uogólnionej transformacji Kelvina jest takiej samej postaci (2.19). To prowadzi nas do następującej definicji poliharmoniczności w nieskończoności.

Definicja 2.1 ([1, Remark 1.4])**.** Jeśli $E \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty oraz u jest funkcją poliharmoniczną na $\mathbb{R}^n \setminus E$, wtedy u jest *poliharmoniczna w* ∞ jeśli $K[u]$ posiada osobliwość usuwalną w zerze.

Uwaga 2.2. Z powyższej definicji wynika, że funkcja u określona na zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus E$ jest poliharmoniczna w ∞ jeśli

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \frac{u(x)}{|x|^{2p-n}} < \infty, & \text{gdy } \ n < 2p, \\ \lim_{x\to\infty} u(x) < \infty, & \text{gdy } \ n = 2p, \\ \lim_{x\to\infty} u(x) = 0, & \text{gdy } \ n > 2p. \end{cases}$$

Niech teraz u będzie określona na zbiorze $e^{i\varphi}(\mathbb{R}^n \setminus E)$, wtedy będziemy mówili, że u jest poliharmoniczna w ∞ jeśli funkcja $\widehat{u}(x) := u(e^{i\varphi}x)$ jest poliharmoniczna w ∞.

Lemat 2.3. Jeśli $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B)$, to $K[u] \in \mathcal{A}_{\Delta^p}\left(\bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}}(\mathbb{R}^n \setminus B)\right)$.

Dowód. Niech $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B)$, wtedy z Lematu 2.2 jest $K[u] \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\mathbb{R}^n \setminus B)$. Niech $k = 0, 1, \ldots, p-1$ będzie ustalone. Wystarczy pokazać, że $K[u] \in \mathcal{A}_{\Delta^p}\left(e^{\frac{k\pi i}{p}}(\mathbb{R}^n \setminus B)\right)$. Rozważmy funkcję pomocniczą $v(x) = K[u](e^{\frac{k\pi i}{p}}x), x \in B$. Wówczas

$$v(x) = e^{\frac{k(2p-n)\pi i}{p}}|x|^{2p-n}u\left(\frac{e^{\frac{-k\pi i}{p}}x}{|x|^2}\right),$$

zatem

$$K[v](x) = e^{\frac{k(2p-n)\pi i}{p}}\left|\frac{x}{|x|^2}\right|^{2p-n}|x|^{2p-n}u\left(\frac{e^{\frac{-k\pi i}{p}}\frac{x}{|x|^2}}{\left|\frac{x}{|x|^2}\right|^2}\right) = e^{\frac{k(2p-n)\pi i}{p}}u(e^{\frac{-k\pi i}{p}}x).$$

Na mocy Lematu 1.1 mamy $u(e^{\frac{-k\pi i}{p}}x) \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B)$, co oznacza, że $K[v] \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B)$. Ponieważ $K[K[v]] = v$, to ponownie korzystając z Lematu 2.2 wnioskujemy, że $v \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\mathbb{R}^n \setminus B)$, co z kolei równoważne jest temu, że $K[u] \in \mathcal{A}_{\Delta^p}\left(e^{\frac{k\pi i}{p}}(\mathbb{R}^n \setminus B)\right)$. □

Lemat 2.4 (Lemat o symetrii)**.** Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{C}^n$, $|x| \neq 0$ oraz $|y| \neq 0$, zachodzi następujący wzór

$$\left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right| = \left|\frac{y}{|y|} - |y|x\right|.$$

Dowód. Dowód jest analogiczny jak dla $\mathbb{R}^n$ (por. [2, str. 10]). Niech L, P oznaczają odpowiednio lewą i prawą stronę ostatniej równości, wtedy

$$L^2 = \frac{x^2}{|x|^2} - 2|x|y\frac{x}{|x|} + |x|^2y^2 = 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - 2yx + y^2x^2 = P^2,$$

skąd otrzymujemy tezę. □

Wniosek 2.3. Zewnętrzne zagadnienie Dirichleta

$$\begin{cases} \Delta^p u(x) = 0, & x \in \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}}(\mathbb{R}^n \setminus B) \cup \{\infty\}, \\ u(x) = f(x), & x \in \widehat{S}_p \end{cases} \tag{2.20}$$

jeśli posiada rozwiązanie, to jest ono jednoznaczne i określone wzorem

$$u\,(x) = -\frac{1}{p\omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_S e^{\frac{k(2p-n)\pi i}{p}}\frac{1-|x|^{2p}}{\left|e^{\frac{-k\pi i}{p}}\zeta - x\right|^n}f(e^{\frac{-k\pi i}{p}}\zeta)d\,S(\zeta).$$

Dowód. Niech u będzie rozwiązaniem zagadnienia (2.20), rozważmy funkcję pomocniczą $v(x) := K[u](x)$. Wtedy v jest poliharmoniczna na B, a więc i na $\widehat{B}_p$ oraz ciągła na $\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p$. Niech $x = e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta$, $\zeta \in S$ dla $k = 0, 1, ..., p-1$, wówczas

$$v(x) = v(e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta) = |e^{\frac{(2p-n)k\pi i}{p}}|_{\mathbb{R}}f(e^{\frac{-k\pi i}{p}}\zeta) = |e^{\frac{(2p-n)k\pi i}{p}}|_{\mathbb{R}}f(-e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}}\zeta),$$

przy czym funkcja $f(-e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}}\zeta)$ jest dobrze określona, bo $k = 0, 1, ..., p-1$ oraz $-\zeta \in S$. Z powyższych rozważań wynika, że funkcja v jest rozwiązaniem następującego zagadnienia Dirichleta:

$$\begin{cases} \Delta^p v(x) = 0, & x \in \widehat{B}_p, \\ v(x) = |x|^{2p-n} f(\overline{x}), & x \in \widehat{S}_p. \end{cases}$$

Zatem zgodnie z Twierdzeniem 2.1, funkcja v jest postaci

$$v(x) = \frac{1}{p\omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_S e^{\frac{k(2p-n)\pi i}{p}} \frac{1-|x|^{2p}}{|e^{\frac{-k\pi i}{p}}x-\zeta|^n} f(e^{\frac{-k\pi i}{p}}\zeta)d\,S(\zeta) \qquad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p.$$

Ponieważ $v = K[u]$, to nasze rozwiązanie jest postaci $u = K[v]$. Istotnie, na mocy Lematu 2.3 funkcja $K[v](x)$ jest poliharmoniczna na $\bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}}(\mathbb{R}^n \setminus B) \cup \{\infty\}$, a ponadto dla dowolnego $k = 0, 1, \ldots, p-1$ i $\zeta \in S$ jest

$$\begin{aligned} \lim_{x \to e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta} K[v](x) &= \lim_{x \to e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta} |x|^{2p-n} v\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = e^{\frac{k(2p-n)\pi i}{p}} v\left(e^{\frac{-k\pi i}{p}}\zeta\right) \\ &= e^{\frac{k(2p-n)\pi i}{p}} e^{\frac{-k(2p-n)\pi i}{p}} f\left(\overline{e^{\frac{-k\pi i}{p}}\zeta}\right) = f\left(e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta\right). \end{aligned}$$

Z powyższych rozważań wynika więc, że

$$\begin{aligned} u\,(x) &= K[v](x) = \frac{1}{p\omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_S e^{\frac{k(2p-n)\pi i}{p}} \frac{|x|^{2p}\left(1-\left|\frac{x}{|x|^2}\right|^{2p}\right)}{|x|^n\left|e^{\frac{-k\pi i}{p}}\frac{x}{|x|^2}-\zeta\right|^n} f(e^{\frac{-k\pi i}{p}}\zeta)d\,S(\zeta) \\ &= -\frac{1}{p\omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_S e^{\frac{k(2p-n)\pi i}{p}} \frac{1-|x|^{2p}}{\left|e^{\frac{-k\pi i}{p}}\right|_{\mathbb{R}}^n\left|\frac{x}{|x|}-e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta|x|\right|^n} f(e^{\frac{-k\pi i}{p}}\zeta)\,dS(\zeta). \end{aligned}$$

Z Lematu 2.4 dostajemy

$$\begin{aligned} u\,(x) &= -\frac{1}{p\omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_S e^{\frac{k(2p-n)\pi i}{p}} \frac{1-|x|^{2p}}{\left|e^{\frac{-k\pi i}{p}}\right|_{\mathbb{R}}^n\left|\frac{e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta}{|e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta|}-|e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta|x\right|^n} f(e^{\frac{-k\pi i}{p}}\zeta)\,dS(\zeta) \\ &= -\frac{1}{p\omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_S e^{\frac{k(2p-n)\pi i}{p}} \frac{1-|x|^{2p}}{\left|e^{\frac{-k\pi i}{p}}\zeta-x\right|^n} f(e^{\frac{-k\pi i}{p}}\zeta)\,dS(\zeta), \end{aligned}$$

o co chodziło. Jednoznaczność rozwiązania (2.20) jest oczywista. □

Rozdział 3

Poliharmoniki sferyczne i jądro Poissona dla funkcji poliharmonicznych

W tym rozdziale będziemy badać własności wielomianów poliharmonicznych jednorodnych. Podamy ich związek z wielomianami jednorodnymi harmonicznymi. Następnie zdefiniujemy tzw. poliharmoniki sferyczne, udowodnimy własności analogiczne do tych jakie mają harmoniki sferyczne, m.in. ortogonalność poliharmonik różnych stopni. Wykażemy także rozkład ortogonalny przestrzeni $L^2(\widehat{S}_p)$ na przestrzenie poliharmonik sferycznych. Kolejno wprowadzimy pojęcie poliharmonik strefowych, podamy ich własności i znowu zbadamy ich związek ich harmonicznym odpowiednikiem, tj. z harmonikami strefowymi. Zdefiniujemy jądro poliharmoniczne Poissona i całkę poliharmoniczną Poissona dla zbioru $\widehat{B}_p$, po czym, korzystając z własności poliharmonik, wyprowadzimy wzór na wspomniane jądro Poissona a także podamy jego własności. Jako wniosek otrzymamy wzór na rozwiązanie zagadnienia Dirichleta rozważanego w rozdziale drugim. Wreszcie, wykorzystując wielomiany Gegenbauera wyprowadzimy jawny wzór na poliharmoniki strefowe.

1 Wielomiany poliharmoniczne jednorodne

Niech $m, p \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez $\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n)$ przestrzeń wielomianów jednorodnych stopnia m określonych na przestrzeni $\mathbb{C}^n$, zaś przez $\mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n) \subseteq \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n)$ przestrzeń wielomianów określonych na $\mathbb{C}^n$, które są jednorodne stopnia m i poliharmoniczne rzędu p. Przez wielomian jednorodny stopnia m rozumiemy wielomian q taki, że

$$q(az) = a^m q(z)$$

dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$ oraz $z \in \mathbb{C}^n$.

Zauważmy, że gdy $m < 2p$, to $\mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n) = \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n)$.

W przypadku szczególnym $p = 1$ dostajemy przestrzeń wielomianów harmonicznych jednorodnych stopnia m, będziemy ją oznaczać symbolem $\mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n) := \mathcal{H}_m^1(\mathbb{C}^n)$.

Na początku przypomnimy pewne własności wielomianów harmonicznych jednorodnych, z których będziemy później korzystać.

Lemat 3.1 ([2, Proposition 5.5])**.** Jeśli $m \geqslant 2$, to

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n) \oplus |x|^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{C}^n),$$

gdzie symbol $\oplus$ oznacza algebraiczną sumę prostą, która oznacza, że każdy element przestrzeni $\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n)$ może być jednoznacznie przedstawiony jako suma wielomianów przestrzeni $\mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n)$ i $|x|^2 \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{C}^n)$.

Lemat 3.2 ([2, Theorem 5.7])**.** Jeśli $q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n)$, to istnieją jednoznaczne wielomiany $q_{m-2k} \in \mathcal{H}_{m-2k}(\mathbb{C}^n), k = 0, 1, \dots, [\frac{m}{2}]$ takie, że

$$q(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} |x|^{2k} q_{m-2k}(x),$$

przy czym $[\frac{m}{2}]$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą $\frac{m}{2}$.

Lemat 3.3 ([2, Propositions 5.8])**.** Przestrzenie $\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n)$ i $\mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n)$ są skończenie wymiarowe, przy czym

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n) &= \binom{n+m-1}{n-1}, \\
\dim \mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n) &= \begin{cases} \dim \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n) & \text{dla} \quad m = 0, 1, \\ \dim \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n) - \dim \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{C}^n) & \text{dla} \quad m \geqslant 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Powyższe lematy przeniesiemy na wielomiany poliharmoniczne. W tym celu posłużymy się następującą wersją twierdzenia Almansiego dla wielomianów jednorodnych (por. Stwierdzenie 1.3).

Stwierdzenie 3.1. Niech $m \geqslant 2p$ (odpowiednio $m < 2p$). Funkcja $u \in \mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją jednoznacznie określone funkcje $u_k \in \mathcal{H}_{m-2k}(\mathbb{C}^n)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$ (odpowiednio $k = 0, 1, \dots, [\frac{m}{2}]$) takie, że

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k} u_k(x) \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{C}^n \tag{3.1}$$

i odpowiednio

$$u(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} |x|^{2k} u_k(x) \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Dowód. Ponieważ dla $m < 2p$ jest $\mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n) = \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n)$, to teza stwierdzenia pokrywa się z Lematem 3.2, zatem wystarczy, że wykażemy tezę dla $m \geqslant 2p$.

Niech $m \geqslant 2p$. Zauważmy, że implikacja w lewą stronę jest oczywista. Dowód w prawą stronę przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej po p. Jeśli $p = 1$, to teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla $p = s-1, s > 1$. Niech $u \in \mathcal{H}_m^s(\mathbb{C}^n)$, wtedy z rozwinięcia Almansiego dostajemy, że istnieją jednoznacznie określone funkcje harmoniczne u_k na $\mathbb{C}^n$ takie, że

$$u(x) = \sum_{k=0}^{s-1} |x|^{2k} u_k(x) \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Zatem $u(x) = u_0(x) + |x|^2 v(x)$, gdzie

$$v(x) = \sum_{k=1}^{s-1} |x|^{2k-2} u_k(x) = \sum_{k=0}^{s-2} |x|^{2k} u_{k+1}(x).$$

Ze Stwierdzenia 1.3 wynika, że v jest funkcją poliharmoniczną rzędu $s-1$, z kolei na mocy Lematu 3.1 i z jednoznaczności rozkładu na sumę prostą wnioskujemy, że v jest wielomianem jednorodnym stopnia $m-2$, czyli $v \in \mathcal{H}_{m-2}^{s-1}(\mathbb{C}^n)$. Zatem z założenia indukcyjnego dostajemy, że $u_k \in \mathcal{H}_{m-2k}(\mathbb{C}^n)$ dla $k = 1, 2, \dots, s-1$. Ponieważ $u_0(x) = u(x) - |x|^2 v(x)$, to $u_0 \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n)$. Z powyższych rozważań i z zasady indukcji matematycznej otrzymujemy tezę. □

Uwaga 3.1. Od teraz, o ile nie będzie powiedziane inaczej, będziemy zakładać, że każda funkcja $u \in \mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n)$ ma rozwinięcie (3.1) tak jak w przypadku $m \geqslant 2p$, mając w pamięci, że $u_k(x) \equiv 0$ dla $k > [\frac{m}{2}]$ w przypadku, gdy $m < 2p$.

Możemy teraz przejść do sformułowania analogicznych własności zawartych w Lematach 3.1–3.3 dla wielomianów poliharmonicznych.

Stwierdzenie 3.2. Jeśli $m \geqslant 2p$, to

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n) = \mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n) \oplus |x|^{2p}\mathcal{P}_{m-2p}(\mathbb{C}^n).$$

Dowód. Z Lematu 3.1 dostajemy ciąg równości

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n) &= \mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n) \oplus |x|^2\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{C}^n) \\
&= \mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n) \oplus |x|^2\mathcal{H}_{m-2}(\mathbb{C}^n) \oplus |x|^4\mathcal{P}_{m-4}(\mathbb{C}^n) \\
&= \dots \\
&= \mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n) \oplus |x|^2\mathcal{H}_{m-2}(\mathbb{C}^n) \oplus |x|^4\mathcal{H}_{m-4}(\mathbb{C}^n) \oplus ... \oplus |x|^{2(p-1)}\mathcal{H}_{m-2(p-1)}(\mathbb{C}^n) \\
&\quad \oplus |x|^{2p}\mathcal{P}_{m-2p}(\mathbb{C}^n).
\end{aligned}$$

Ze Stwierdzenia 3.1 jest

$$\mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n) = \mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n) \oplus |x|^2\mathcal{H}_{m-2}(\mathbb{C}^n) \oplus ... \oplus |x|^{2(p-1)}\mathcal{H}_{m-2(p-1)}(\mathbb{C}^n), \tag{3.2}$$

a więc

$$\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n) = \mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n) \oplus |x|^{2p}\mathcal{P}_{m-2p}(\mathbb{C}^n),$$

co kończy dowód stwierdzenia. □

Stwierdzenie 3.3. Jeśli $q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n)$, to istnieją jednoznacznie określone wielomiany $q_{m-2kp} \in \mathcal{H}_{m-2kp}^p(\mathbb{C}^n)$, $k = 0, 1, \dots, [\frac{m}{2p}]$ takie, że

$$q(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2p}]} |x|^{2kp} q_{m-2kp}(x).$$

Dowód. Wystarczy zastosować indukcyjnie Stwierdzenie 3.2. □

Stwierdzenie 3.4. Przestrzeń $\mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n)$ jest skończenie wymiarowa, ponadto:

(a) jeśli $m < 2p$, to

$$\dim \mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n) = \dim \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n) = \binom{n+m-1}{n-1};$$

(b) jeśli $m \geqslant 2p$, to

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n) &= \dim \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n) - \dim \mathcal{P}_{m-2p}(\mathbb{C}^n) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \dim \mathcal{H}_{m-2k}(\mathbb{C}^n) \\
&= \binom{n+m-1}{n-1} - \binom{n+m-2p-1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Dowód. Jeśli $m < 2p$, to $\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n) = \mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n)$, więc teza jest oczywista (por. Lemat 3.3).

Jeśli $m \geqslant 2p$, to ze Stwierdzenia 3.2 oraz z własności sumy prostej mamy

$$\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n) = \dim \mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n) + \dim \mathcal{P}_{m-2p}(\mathbb{C}^n),$$

stąd dostajemy pierwszą równość, druga równość wynika wprost z (3.2), zaś trzecia na przykład z punktu (a) i z pierwszej równości punktu (b). □

2 Poliharmoniki sferyczne i rozkład ortogonalny przestrzeni $L^2(\widehat{S}_p)$

W tej części pracy wprowadzimy pojęcie poliharmonik sferycznych. Będzie to naturalne uogólnienie harmonik sferycznych.

Definicja 3.1. *Poliharmoniką sferyczną stopnia m rzędu p* nazywamy każdą funkcję przestrzeni $\mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n)$ obciętą do zbioru $\widehat{S}_p$.

Przestrzeń poliharmonik sferycznych oznaczamy przez $\mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$, mamy więc

$$\mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p) := \left\{ u|_{\widehat{S}_p} : u \in \mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n) \right\}.$$

Uwaga 3.2. Poliharmoniki sferyczne rzędu 1 nazywamy *harmonikami sferycznymi*. Przestrzeń harmonik sferycznych będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{H}_m(S) := \mathcal{H}^1_m(S)$ (por. [2, Chapter 5]).

Wniosek 3.1. Przestrzeń $\mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$ jest skończenie wymiarowa.

Dowód. Pokażemy, że przestrzenie $\mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$ i $\mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n)$ są izomorficzne. Istotnie, rozważmy odwzorowanie $\varphi : \mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$ określone wzorem $u \mapsto u|_{\widehat{S}_p}$. Oczywiście φ jest na. Niech $u = 0$ na $\widehat{S}_p$, wtedy z Twierdzenia 2.1 mamy $u \equiv 0$ na $\mathbb{C}^n$, czyli φ jest różnowartościowe, a więc jest izomorfizmem. Zatem $\dim \mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p) = \dim \mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n) < \infty$ (por. Stwierdzenie 3.4), o co chodziło. □

Wniosek 3.2. Funkcja $u \in \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją jednoznacznie określone harmoniki sferyczne $u_k \in \mathcal{H}_{m-2k}(\widehat{S}_p)$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$ takie, że

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2jk\pi i}{p}} u_k(x) \quad \text{dla} \quad x \in e^{\frac{j\pi i}{p}} S, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1. \tag{3.3}$$

Dowód. Teza wynika natychmiast ze Stwierdzenia 3.1. □

Wniosek 3.3. Niech q będzie wielomianem stopnia m na $\mathbb{C}^n$. Wówczas jego obcięcie do zbioru $\widehat{S}_p$ jest sumą poliharmonik sferycznych stopnia co najwyżej m.

Dowód. Teza wynika ze Stwierdzenia 3.3 oraz z faktu, że każdy wielomian stopnia m jest sumą wielomianów jednorodnych stopnia co najwyżej m. □

Wniosek 3.4. Jeśli f jest wielomianem stopnia m na $\mathbb{C}^n$, to zagadnienie Dirichleta

$$\begin{cases} \Delta^p u(x) = 0, & x \in \widehat{B}_p, \\ u(x) = f(x), & x \in \widehat{S}_p \end{cases}$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie w postaci wielomianu stopnia co najwyżej m.

Dowód. Niech f będzie wielomianem stopnia m na $\mathbb{C}^n$. Na mocy Wniosku 3.3 istnieją $q_k \in \mathcal{H}_k^p(\widehat{S}_p)$ takie, że

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{m} q_k(\zeta).$$

Z definicji poliharmonik sferycznych wynika, że istnieją $\tilde{q}_k \in \mathcal{H}_k^p(\mathbb{C}^n)$ takie, że $\tilde{q}_k = q_k$ na $\widehat{S}_p$. Niech zatem

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{m} \tilde{q}_k(x),$$

wtedy $\tilde{f}$ będzie wielomianem poliharmonicznym rzędu p stopnia co najwyżej m na $\mathbb{C}^n$ (w szczególności na $\widehat{B}_p$). Stąd i z jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Dirichleta (por. Twierdzenie 2.1) wynika, że $u(x) \equiv \tilde{f}(x)$ dla $x \in \widehat{B}_p$, co kończy dowód. □

Zanim przejdziemy do wyprowadzenia kolejnych własności poliharmonik sferycznych przypomnijmy najpierw definicję sumy prostej przestrzeni Hilberta (zob. [2, str. 81]).

Definicja 3.2. Niech dana będzie przestrzeń Hilberta H. Mówimy, że H jest *sumą prostą* przestrzeni H_m, co oznaczamy przez $H = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m$, jeśli następujące warunki są spełnione:

i) H_m jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni H dla każdego m;

ii) przestrzeń H_m jest ortogonalna do przestrzeni H_k jeśli $m \neq k$;

iii) dla dowolnego $x \in H$ istnieją jednoznacznie określone $x_m \in H_m$ takie, że $x = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots$, gdzie suma zbiega w normie przestrzeni H.

Rozważmy teraz przestrzeń Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem na S, tj. przestrzeń $L^2(S)$ z iloczynem skalarnym:

$$\langle f, g \rangle_S := \int_S f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, d\sigma(\zeta), \tag{3.4}$$

gdzie $d\sigma(\zeta)$ oznacza unormowaną miarą powierzchniową na S, tzn. $\frac{1}{\omega_n} dS(\zeta) = d\sigma(\zeta)$. Wiadomo, że przestrzeń $L^2(S)$ jest sumą prostą przestrzeni harmonik sferycznych $\mathcal{H}_m(S)$, tzn.

$$L^2(S) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m(S).$$

Tak jak własności wielomianów harmonicznych i harmonik sferycznych przenieśliśmy na ich poliharmoniczne odpowiedniki, tak samo chcemy to zrobić z podanym rozkładem ortogonalnym. W tym celu rozważmy przestrzeń $L^2(\widehat{S}_p)$ jako zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem na $\widehat{S}_p$, tj. zbiór funkcji określonych na $\widehat{S}_p$ takich, że

$$||f||_{L^2(\widehat{S}_p)} = \left(\frac{1}{p} \int_S \sum_{j=0}^{p-1} \left| f(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta) \right|_{\mathbb{C}}^2 d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Zauważmy, że $|| \cdot ||_{L^2(\widehat{S}_p)}$ jest normą na $L^2(\widehat{S}_p)$. Jej postać sugeruje nam aby przestrzeń $L^2(\widehat{S}_p)$ wyposażyć w iloczyn skalarny:

$$\langle f, g \rangle_{\widehat{S}_p} := \frac{1}{p} \int_S \sum_{j=0}^{p-1} f(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta)\overline{g(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta)}\, d\sigma(\zeta). \tag{3.5}$$

Nietrudno pokazać, że przestrzeń $L^2(\widehat{S}_p)$ z iloczynem skalarnym (3.5) jest przestrzenią Hilberta. Zatem naszym celem będzie pokazanie rozkładu ortogonalnego przestrzeni $L^2(\widehat{S}_p)$ na przestrzenie poliharmonik sferycznych $\mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$. Będzie to „poliharmoniczna wersja" twierdzenia [2, Theorem 5.12].

Uwaga 3.3. Jeśli warunki i) oraz ii) są spełnione, to warunek iii) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy span$\bigcup_{m=0}^{\infty} H_m$ jest zbiorem gęstym w H.

Przypomnijmy następujący fakt:

Lemat 3.4 ([2, Proposition 5.9])**.** Jeśli $m \neq l$, to przestrzeń $\mathcal{H}_m(S)$ jest ortogonalna do $\mathcal{H}_l(S)$ w $L^2(S)$ względem iloczynu skalarnego

$$\langle f, g\rangle_S := \int\limits_S f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\, d\sigma(\zeta).$$

Ponadto, jeśli ograniczymy wszystkie funkcje do S, to rozkład podany w Lemacie 3.1 jest ortogonalny względem iloczynu skalarnego z $L^2(S)$.

Udowodnimy teraz odpowiednik Lematu 3.4 dla poliharmonik sferycznych.

Stwierdzenie 3.5. Jeśli $m \neq l$, to przestrzeń $\mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$ jest ortogonalna do $\mathcal{H}^p_l(\widehat{S}_p)$ w $L^2(\widehat{S}_p)$. Ponadto, jeśli ograniczymy wszystkie funkcje do zbioru $\widehat{S}_p$, to rozkład podany w Stwierdzeniu 3.2 jest ortogonalny względem iloczynu skalarnego na $L^2(\widehat{S}_p)$.

Dowód. Niech $u \in \mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$ oraz $v \in \mathcal{H}^p_l(\widehat{S}_p)$ dla pewnych $m \neq l$. Wtedy na mocy Wniosku 3.2 istnieją wielomiany $u_k \in \mathcal{H}_{m-2k}(S)$ i $v_k \in \mathcal{H}_{l-2k}(S)$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$ takie, że

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2jk\pi i}{p}} u_k(x) \quad \text{oraz} \quad v(x) = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2jk\pi i}{p}} v_k(x)$$

dla $x \in e^{\frac{j\pi i}{p}} S$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$. Zatem

$$\langle u, v\rangle_{\widehat{S}_p} = \frac{1}{p}\int\limits_S \sum_{j=0}^{p-1}\left[\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2jk\pi i}{p}} u_k(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta)\overline{\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2jk\pi i}{p}} v_k(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta)}\right] d\sigma(\zeta).$$

Z jednorodności harmonik jest

$$u_k(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta) = e^{\frac{(m-2k)j\pi i}{p}} u_k(\zeta), \quad v_k(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta) = e^{\frac{(l-2k)j\pi i}{p}} v_k(\zeta)$$

dla $\zeta \in S$ i $j, k = 0, 1, \ldots, p-1$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_{\widehat{S}_p} &= \frac{1}{p}\int\limits_S \sum_{j=0}^{p-1}\left[\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{mj\pi i}{p}} u_k(\zeta) \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{-lj\pi i}{p}}\overline{v_k(\zeta)}\right] d\sigma(\zeta) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} e^{\frac{(m-l)j\pi i}{p}} \sum_{0\leqslant\alpha,\beta\leqslant p-1} \int\limits_S u_\alpha(\zeta)\overline{v_\beta(\zeta)} d\sigma(\zeta) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} e^{\frac{(m-l)j\pi i}{p}} \sum_{0\leqslant\alpha,\beta\leqslant p-1} \langle u_\alpha, v_\beta\rangle_S .
\end{aligned}$$

Na mocy Lematu 3.4 jest $\langle u_\alpha, v_\alpha\rangle_S = 0$, ponieważ $m-2\alpha \neq l-2\alpha$. Dlatego też

$$\langle u,v\rangle_{\widehat{S}_p} = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} e^{\frac{(m-l)j\pi i}{p}} \sum_{\substack{0\leqslant\alpha,\beta\leqslant p-1\\ \alpha\neq\beta}} \langle u_\alpha, v_\beta\rangle_S .$$

Załóżmy, że $m-l$ jest liczbą całkowitą nieparzystą. Wtedy oczywiście $\langle u_\alpha, v_\beta\rangle_S = 0$ dla dowolnego $\alpha,\beta = 0,1,\dots,p-1$ na mocy Lematu 3.4 i w konsekwencji otrzymujemy, że $\langle u,v\rangle_{\widehat{S}_p} = 0$. Załóżmy teraz, że $m-l$ jest całkowitą liczbą parzystą, tzn. istnieje $\gamma\in\mathbb{Z}$ takie, że $m-l=2\gamma$, wówczas

$$\langle u,v\rangle_{\widehat{S}_p} = \frac{1-e^{2\gamma\pi i}}{p(1-e^{\frac{2\gamma\pi i}{p}})} \sum_{\substack{0\leqslant\alpha,\beta\leqslant p-1\\ \alpha\neq\beta}} \langle u_\alpha, v_\beta\rangle_S = 0,$$

o co chodziło.

Dla dowodu drugiej części stwierdzenia weźmy $v \in |x|^{2p}\mathcal{P}_{m-2p}(\mathbb{C}^n)$, wówczas $v|_{\widehat{S}_p} \in \mathcal{P}_{m-2p}(\widehat{S}_p)$, gdzie $\mathcal{P}_{m-2p}(\widehat{S}_p) := \{u|_{\widehat{S}_p} \colon u \in \mathcal{P}_{m-2p}(\mathbb{C}^n)\}$. Z Wniosku 3.3 wynika, że $v|_{\widehat{S}_p}$ jest sumą poliharmonik sferycznych stopnia co najwyżej $m-2p$. Stąd i z rozważań z pierwszej części dowodu wnioskujemy, że $\langle v|_{\widehat{S}_p}, w|_{\widehat{S}_p}\rangle_{\widehat{S}_p} = 0$ dla dowolnego $w\in\mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n)$. □

Uwaga 3.4. W przypadku gdy $u,v\in\mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$, to ich iloczyn skalarny w $L^2(\widehat{S}_p)$ redukuje się do standardowego iloczynu skalarnego na $L^2(S)$:

$$\langle u,v\rangle_{\widehat{S}_p} = \frac{1}{p}\int_S \sum_{j=0}^{p-1} e^{\frac{mj\pi i}{p}} u(\zeta) e^{\frac{-mj\pi i}{p}}\overline{v(\zeta)}\, d\sigma(\zeta) = \langle u,v\rangle_S . \tag{3.6}$$

Stwierdzenie 3.6. Powłoka liniowa zbioru $\bigcup_{m=0}^{\infty}\mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni $\mathcal{C}(\widehat{S}_p)$ względem normy supremum.

Dowód. Niech $f\in\mathcal{C}(\widehat{S}_p)$ oraz

$$f(x) = u_j(x) \quad \text{dla} \quad x\in e^{\frac{j\pi i}{p}}S, \quad j=0,1,\dots,p-1,$$

gdzie funkcje u_j są ciągłe na zbiorze $e^{\frac{j\pi i}{p}}S$. Z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa (por. [25, Theorem 7.26]), istnieją ciągi wielomianów $(q^j_m)_{m\in\mathbb{N}}$ takie, że q^j_m jest stopnia m oraz $q^j_m \to u_j$ jednostajnie na $e^{\frac{j\pi i}{p}}S$ gdy $m\to\infty$ dla $j=0,1,\dots,p-1$. Zatem, jeśli położymy

$$q_m(x) := \frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p-1} q^k_m(x) + |x|^2\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{-2k\pi i}{p}} q^k_m(x) + \dots + |x|^{2(p-1)}\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{-2k(p-1)\pi i}{p}} q^k_m(x)\right),$$

to otrzymamy, że $q_m\to f$ jednostajnie na $\widehat{S}_p$, gdzie $q_m\in\operatorname{span}\bigcup_{k=0}^{m+2(p-1)}\mathcal{H}^p_k(\widehat{S}_p)$, co kończy dowód. □

Możemy teraz sformułować wspomniane wcześniej twierdzenie o rozkładzie ortogonalnym przestrzeni $L^2(\widehat{S}_p)$:

Twierdzenie 3.1.

$$L^2(\widehat{S}_p) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p).$$

Dowód. Musimy pokazać, że warunki w Definicji 3.2 są spełnione. Pierwszy z nich zachodzi, bo przestrzeń $\mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$ jest domknięta jako skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni Hilberta (Wniosek 3.1). Drugi warunek ii) zachodzi z uwagi na Stwierdzenie 3.5. Pozostaje zatem pokazać, że zachodzi warunek trzeci. Na mocy Stwierdzenia 3.6, zbiór $\operatorname{span} \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$ jest gęsty w przestrzeni $\mathcal{C}(\widehat{S}_p)$, z kolei $\mathcal{C}(\widehat{S}_p)$ jest gęstym podzbiorem w $L^2(\widehat{S}_p)$, zatem $\operatorname{span} \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$ jest gęsty w $L^2(\widehat{S}_p)$, co kończy dowód iii). □

3 Poliharmoniki strefowe

Rozważmy przestrzeń $\mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$ jako przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym (3.5) indukowanym z $L^2(\widehat{S}_p)$ (możemy tak zrobić ponieważ $\mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $L^2(\widehat{S}_p)$). Analogicznie do harmonik strefowych wprowadzimy pojęcie poliharmonik strefowych (por. [2, str. 94]).

Niech $\eta \in \widehat{S}_p$ będzie ustalonym punktem. Rozważmy funkcjonał liniowy $\Lambda_\eta \colon \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p) \to \mathbb{C}$ określony wzorem

$$\Lambda_\eta(q) = q(\eta) \quad \text{dla} \quad q \in \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p).$$

Ponieważ $\mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$ jest skończenie wymiarową przestrzenią Hilberta, to na mocy twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonału (por. [6, Theorem 2.22]) istnieje jednoznacznie określone $Z_m^p(\cdot, \eta) \in \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$ takie, że

$$q(\eta) = \langle q, Z_m^p(\cdot, \eta) \rangle_{\widehat{S}_p} \quad \text{dla każdego} \quad q \in \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p). \tag{3.7}$$

Definicja 3.3. Funkcję $Z_m^p(\cdot, \eta)$ spełniającą (3.7) nazywamy *poliharmoniką strefową* stopnia m rzędu p z biegunem η.

Uwaga 3.5. Poliharmoniki strefowe rzędu $p = 1$ nazywamy *harmonikami strefowymi*. W dalszej części pracy będziemy je oznaczać przez $Z_m(\cdot, \eta)$ zamiast $Z_m^1(\cdot, \eta)$ dla $\eta \in S$.

Przypomnijmy podstawowe własności harmonik strefowych, wykorzystamy je w dalszych rozważaniach.

Lemat 3.5 ([2, Proposition 5.27])**.** Niech $\zeta, \eta \in S$, wtedy:

(a) $Z_m(\zeta, \eta) = Z_m(\eta, \zeta)$;

(b) $Z_m(\zeta, \eta) \in \mathbb{R}$;

(c) $Z_m(\eta, \eta) = \dim \mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n)$;

(d) $|Z_m(\zeta, \eta)|_{\mathbb{C}} \leqslant \dim \mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n)$.

Zauważmy, że harmoniki strefowe $Z(\cdot, \eta)$ możemy przedłużyć na dowolną sferę obróconą biorąc biegun z dowolnej sfery obróconej w następujący sposób:

$$Z_m(e^{\varphi i}\zeta, e^{\psi i}\eta) := e^{m(\varphi-\psi)i} Z_m(\zeta, \eta),$$

dla $\zeta, \eta \in S$ oraz $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Wynika stąd w szczególności, że $Z_m(e^{\varphi i}\zeta, e^{\psi i}\eta)$ jest po prostu obcięciem pewnego wielomianu harmonicznego jednorodnego stopnia m na $\mathbb{C}^n$ do zbioru $e^{\varphi i}S$ oraz jest jednoznacznie określone. Ponadto dla $\zeta, \eta \in S$ mamy

$$Z_m(e^{\varphi i}\zeta, e^{\psi i}\eta) = Z_m(e^{-\psi i}\eta, e^{-\varphi i}\zeta)$$

oraz

$$\overline{Z_m(e^{\varphi i}\zeta, e^{\psi i}\eta)} = Z_m(e^{\psi i}\eta, e^{\varphi i}\zeta).$$

Stwierdzenie 3.7. Niech $\zeta, \eta \in \widehat{S}_p$ oraz $a \in \mathbb{C}$, wtedy:

(a) $\overline{Z^p_m(\zeta, \eta)} = Z^p_m(\eta, \zeta)$;

(b) $Z^p_m(\zeta, \zeta) \in \mathbb{R}$;

(c) $Z^p_m(a\zeta, \eta) = Z^p_m(\zeta, \overline{a}\eta)$.

Dowód. Dla dowodu własności (a) weźmy bazę ortonormalną $\{e_1, e_2, \ldots, e_{h^p_{m,n}}\}$ przestrzeni $\mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$, gdzie $h^p_{m,n} := \dim \mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n) = \dim \mathcal{H}^p_m(\widehat{S}_p)$. Wtedy z własności przestrzeni

Hilberta (por. [6, Theorem 1.55]) dla każdego $\zeta, \eta \in \widehat{S}_p$ jest

$$\begin{aligned} Z_m^p(\zeta,\eta) &= \sum_{k=1}^{h_m^p} \langle Z_m^p(\cdot,\eta), e_k\rangle_{\widehat{S}_p} e_k(\zeta) = \sum_{k=1}^{h_m^p} \overline{\langle e_k, Z_m^p(\cdot,\eta)\rangle_{\widehat{S}_p}} e_k(\zeta) \\ &= \sum_{k=1}^{h_m^p} \overline{e_k(\eta)} e_k(\zeta) = \overline{\sum_{k=1}^{h_m^p} \overline{e_k(\zeta)} e_k(\eta)} = \overline{Z_m^p(\eta,\zeta)}, \end{aligned}$$

o co chodziło. Druga własność wynika wprost z pierwszej. Dla dowodu własności (c) wystarczy skorzystać z jednorodności poliharmoniki i zastosować własność (a). □

Udowodnimy teraz własności, które dadzą nam związek pomiędzy poliharmonikami a harmonikami strefowymi. Prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie 3.2. Niech $\zeta, \eta \in \widehat{S}_p$, wtedy

$$Z_m^p(\zeta,\eta) = \sum_{k=0}^{p-1} |\zeta|^{2k} |\overline{\eta}|^{2k} Z_{m-2k}(\zeta,\eta).$$

Dowód. Dla dowodu ustalmy punkt $\eta \in e^{\frac{j\pi i}{p}} S$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$, wtedy $\eta := e^{\frac{j\pi i}{p}}\xi$ dla pewnego $\xi \in S$. Załóżmy, że $q \in \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$, wtedy z (3.6) i (3.7) dostaniemy

$$q(\eta) = \langle q, Z_m^p(\cdot,\eta)\rangle_{\widehat{S}_p} = \langle q, Z_m^p(\cdot,\eta)\rangle_S . \tag{3.8}$$

Z drugiej strony, na mocy Wniosku 3.2, istnieją harmoniki q_k stopnia $m - 2k$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, takie, że $q(\xi) = \sum_{k=0}^{p-1} q_k(\xi)$. W konsekwencji istnieją $Z_{m-2k}(\cdot,\xi)$ takie, że $q_k(\xi) = \langle q_k, Z_{m-2k}(\cdot,\xi)\rangle_S$. Z powyższych rozważań i poprzednich własności harmonik strefowych otrzymujemy ciąg równości

$$\begin{aligned} q(\eta) &= e^{\frac{jm\pi i}{p}} q(\xi) = e^{\frac{jm\pi i}{p}} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S q_k(\zeta) Z_{m-2k}(\zeta,\xi) d\sigma(\zeta) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2jk\pi i}{p}} \int_S q_k(\zeta) Z_{m-2k}(\zeta, e^{\frac{-j\pi i}{p}}\xi) d\sigma(\zeta) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2jk\pi i}{p}} \int_S q_k(\zeta) \overline{Z_{m-2k}(\zeta,\eta)} d\sigma(\zeta) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2jk\pi i}{p}} \langle q, Z_{m-2k}(\cdot,\eta)\rangle_S \\ &= \left\langle q, \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{-2jk\pi i}{p}} Z_{m-2k}(\cdot,\eta) \right\rangle_S . \end{aligned}$$

Porównując ostatnią równość z (3.8), otrzymamy

$$Z_m^p(\zeta,\eta)=\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{-2jk\pi i}{p}} Z_{m-2k}(\zeta,\eta) \quad \text{dla} \quad \zeta\in S.$$

Niech teraz $l=0,1,\dots,p-1$, wówczas z jednorodności i powyższych rozważań dostaniemy

$$Z_m^p(e^{\frac{l\pi i}{p}}\zeta,\eta)=e^{\frac{ml\pi i}{p}} Z_m^p(\zeta,\eta)=\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{-2jk\pi i}{p}} e^{\frac{2lk\pi i}{p}} Z_{m-2k}(e^{\frac{l\pi i}{p}}\zeta,\eta).$$

Dlatego też, jeśli $\zeta,\eta\in\widehat{S}_p$, to

$$Z_m^p(\zeta,\eta)=\sum_{k=0}^{p-1}|\zeta|^{2k}|\overline{\eta}|^{2k}Z_{m-2k}(\zeta,\eta),$$

co kończy dowód twierdzenia. □

Uwaga 3.6. Tak jak w Uwadze 3.1 mamy w pamięci, że $Z_{m-2k}(\zeta,\eta)\equiv 0$ dla $m-2k<0$ w przypadku, gdy $m<2p$.

Stwierdzenie 3.8. Niech $\zeta,\eta\in\widehat{S}_p$, wtedy

(a) $Z_m^p(\eta,\eta)=\dim\mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n)$;

(b) $|Z_m^p(\zeta,\eta)|_{\mathbb{C}}\leqslant\dim\mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n)$.

Dowód. Dla dowodu (a) załóżmy, że $\eta=e^{\frac{j\pi i}{p}}\xi$ oraz $\xi\in S$. Korzystając z Twierdzenia 3.2, a także z Lematu 3.5, punkt (c) oraz ze Stwierdzenia 3.4, punkt (b), dostajemy ciąg równości:

$$Z_m^p(\eta,\eta)=Z_m^p(\xi,\xi)=\sum_{k=0}^{p-1}Z_{m-2k}(\xi,\xi)=\sum_{k=0}^{p-1}\dim\mathcal{H}_{m-2k}(\mathbb{C}^n)=\dim\mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n).$$

Podobnie dowodzimy punkt (b):

$$|Z_m^p(\zeta,\eta)|_{\mathbb{C}}\leqslant\sum_{k=0}^{p-1}|Z_{m-2k}(\zeta,\eta)|_{\mathbb{C}}\leqslant\sum_{k=0}^{p-1}\dim\mathcal{H}_{m-2k}(\mathbb{C}^n)=\dim\mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n),$$

co kończy dowód. □

Ponieważ $Z_m^p(\cdot,\eta)\in\mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$, to możemy przedłużyć poliharmoniki strefowe na $\widehat{B}_p$. Istotnie, niech $x\in\widehat{B}_p\setminus\{0\}$, wtedy

$$Z_m^p(x,\eta)=|x|^m Z_m^p\left(\frac{x}{|x|},\eta\right)=|x|^m\sum_{k=0}^{p-1}\left|\frac{x}{|x|}\right|^{2k}|\overline{\eta}|^{2k}Z_{m-2k}\left(\frac{x}{|x|},\eta\right),$$

więc

$$Z_m^p(x,\eta) = \sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{\eta}|^{2k} Z_{m-2k}(x,\eta) \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p \setminus \{0\}.$$

Ponieważ przedłużenie poliharmoniki strefowej jest wielomianem jednorodnym, to wnioskujemy, że $Z_m^p(0,\eta) \equiv 0$. Możemy zatem napisać

$$Z_m^p(x,\eta) = \sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{\eta}|^{2k} Z_{m-2k}(x,\eta) \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p. \tag{3.9}$$

Postępując podobnie jak dla poliharmonik strefowych, przedłużamy dowolne poliharmoniki sferyczne na $\widehat{B}_p$. Niech więc $q \in \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$, wtedy dla $x \in \widehat{B}_p \setminus \{0\}$ mamy

$$q(x) = |x|^m q\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^m \int_S q(\zeta) Z_m^p\left(\frac{x}{|x|},\zeta\right) d\sigma(\zeta),$$

czyli

$$q(x) = \int_S q(\zeta) Z_m^p(x,\zeta) d\sigma(\zeta) \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p \setminus \{0\}.$$

Z takiego samego powodu jak wcześniej przyjmujemy, że $q(0) = 0$, w konsekwencji otrzymujemy:

$$q(x) = \int_S q(\zeta) Z_m^p(x,\zeta) d\sigma(\zeta) \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p. \tag{3.10}$$

Poliharmoniki strefowe pozwalają nam znaleźć rozkład ortogonalny z Twierdzenia 3.1 dla danej funkcji $f \in L^2(\widehat{S}_p)$, prawdziwe jest bowiem twierdzenie:

Twierdzenie 3.3. Niech $f \in L^2(\widehat{S}_p)$, wtedy

$$f(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, Z_m^p(\cdot,\eta)\rangle_{\widehat{S}_p} \quad \text{w} \quad L^2(\widehat{S}_p).$$

Dowód. Istotnie, jeśli $f \in L^2(\widehat{S}_p)$, wtedy na mocy Twierdzenia 3.1 istnieją $q_m \in \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$ takie, że

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \sum_{m=0}^{\infty} q_m(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \langle q_m, Z_m^p(\cdot,\eta)\rangle_{\widehat{S}_p} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} q_k, Z_m^p(\cdot,\eta)\right\rangle_{\widehat{S}_p} = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, Z_m^p(\cdot,\eta)\rangle_{\widehat{S}_p}, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

4 Jądro Poissona dla funkcji poliharmonicznych

Przyjmijmy następujące definicje

Definicja 3.4. Funkcję $P_p\colon (\widehat{B}_p \times \widehat{S}_p) \cup (\widehat{S}_p \times \widehat{B}_p) \to \mathbb{C}$ nazywamy *poliharmonicznym jądrem Poissona dla* $\widehat{B}_p$ jeśli dla dowolnej funkcji poliharmonicznej u na $\widehat{B}_p$, która jest ciągła na $\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p$ i dla dowolnego $x \in \widehat{B}_p$ zachodzi następująca zależność

$$u(x) = \langle u, P_p(\cdot, x)\rangle_{\widehat{S}_p} = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\int_S u(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta)\overline{P_p(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta, x)}\, d\sigma(\zeta).$$

Definicja 3.5. Niech $f \in \mathcal{C}(\widehat{S}_p)$. Funkcję zdefiniowaną dla $x \in \widehat{B}_p$ wzorem

$$P_p[f](x) := \langle f, P_p(\cdot, x)\rangle_{\widehat{S}_p} = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\int_S f(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta)\overline{P_p(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta, x)}\, d\sigma(\zeta) \tag{3.11}$$

nazywamy *p-tą całką Poissona dla funkcji f*.

Uwaga 3.7. Dla $p = 1$ powyższe definicje są dobrze znane. Funkcja $P(x,\zeta) := P_1(x,\zeta)$ jest harmonicznym jądrem Poissona dla zwykłej kuli euklidesowej w $\mathbb{R}^n$, zaś $P[f] := P_1[f]$ harmoniczną całką Poissona dla funkcji ciągłych na S (por. Stwierdzenie 1.1, [2, Proposition 5.31] oraz [9, Theorem 3]). Mamy przy tym

$$P(x,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta) = \frac{1 - |x|^2|\overline{\zeta}|^2}{(x^2\overline{\zeta}^2 - 2x\overline{\zeta} + 1)^{n/2}} \tag{3.12}$$

oraz

$$P[f](x) = \int_S P(x,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Stwierdzenie 3.9. Jeśli f jest wielomianem stopnia m na $\mathbb{C}^n$, to $P_p[f|_{\widehat{S}_p}]$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m oraz

$$P_p[f|_{\widehat{S}_p}](x) = \sum_{k=0}^{m} \langle f, Z_k^p(\cdot, x)\rangle_{\widehat{S}_p} \quad \text{dla dowolnego} \quad x \in \widehat{B}_p.$$

Dowód. Z Definicji 3.4 i 3.5 oraz z Wniosku 3.4 wynika, że $P_p[f|_{\widehat{S}_p}]$ jest wielomianem poliharmonicznym rzędu p stopnia co najwyżej m. Ponadto (por. dowód Wniosku 3.4) istnieją $q_k \in \mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n), k = 0, 1, \ldots, p-1$ takie, że

$$P_p[f|_{\widehat{S}_p}](x) = \sum_{k=0}^{m} q_k(x) \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p,$$

przy czym, na mocy (3.10) jest

$$q_k(x) = \int_S Z_k^p(x,\zeta) q_k(\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Z powyższych rozważań i z ortogonalności poliharmonik sferycznych różnych stopni wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} P_p[f|_{\widehat{S}_p}](x) &= \sum_{k=0}^{m} \int_S Z_k^p(x,\zeta) q_k(\zeta) d\zeta = \sum_{k=0}^{m} \langle q_k, Z_k^p(\cdot,x)\rangle_S \\ &= \sum_{k=0}^{m} \langle q_k, Z_k^p(\cdot,x)\rangle_{\widehat{S}_p} = \sum_{k=0}^{m} \left\langle \sum_{l=0}^{m} q_l(\zeta), Z_k^p(\cdot,x) \right\rangle_{\widehat{S}_p} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \langle f, Z_k^p(\cdot,x)\rangle_{\widehat{S}_p}, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Stwierdzenie 3.9 możemy również zapisać w takiej postaci:

Stwierdzenie 3.10. Jeśli f jest wielomianem stopnia m na $\mathbb{C}^n$, to $P_p[f|_{\widehat{S}_p}]$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m oraz

$$P_p[f|_{\widehat{S}_p}](x) = (1 - |x|^{2p}) q(x) + f(x), \tag{3.13}$$

gdzie q jest pewnym wielomianem stopnia co najwyżej $m - 2p$.

Dowód. Wystarczy pokazać drugą część tezy. Niech zatem f będzie wielomianem stopnia m na $\mathbb{C}^n$ takim, że $f = f_j$ na $e^{\frac{i\pi i}{p}} S$. Z Lematu 2.1 istnieją funkcje harmoniczne g_k takie, że

$$P_p[f|_{\widehat{S}_p}](x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1 - |x|^{2p}}{1 - e^{\frac{2k\pi i}{p}} |x|^2} g_k(x) \tag{3.14}$$

Wtedy (por. dowód Twierdzenia 2.1)

$$g_k(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}} \zeta) = \frac{1}{p} f_{p-k}(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}} \zeta)$$

dla $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Ponieważ g_k są harmoniczne, to (por. [2, Theorem 5.1]) istnieją wielomiany q_k^0, $k = 0, 1, \ldots, p-1$, stopnia co najwyżej $m - 2$ takie, że

$$g_k(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}} x) = (1 - |x|^2) q_k^0(x) + \frac{1}{p} f(e^{\frac{(p-k)\pi i}{p}} x).$$

Zatem

$$g_k(x) = (1 - e^{\frac{2(k-p)\pi i}{p}} |x|^2) q_k^1(x) + \frac{1}{p} f(x),$$

gdzie $q_k^1(x) = q_k^0(e^{\frac{(k-p)\pi i}{p}}x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $m-2$. Podstawiając powyższe do (3.14), otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_p[f|_{\widehat{S}_p}](x) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1-|x|^{2p}}{1-e^{\frac{2k\pi i}{p}}|x|^2}\left((1-e^{\frac{2(k-p)\pi i}{p}}|x|^2)q_k^1(x) + \frac{1}{p}f(x)\right) \\ &= (1-|x|^{2p})q(x) + \frac{1}{p}f(x)\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1-|x|^{2p}}{1-e^{\frac{2k\pi i}{p}}|x|^2}, \end{aligned}$$

gdzie $q(x) = \sum_{k=0}^{p-1} q_k^1(x)$. Ponadto (por. dowód Twierdzenia 2.1)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1}\frac{1-|x|^{2p}}{1-e^{\frac{2k\pi i}{p}}|x|^2} &= \sum_{k=0}^{p-1}\left(1+e^{\frac{2k\pi i}{p}}|x|^2+\cdots+e^{\frac{2k(p-1)\pi i}{p}}|x|^{2(p-1)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}1 + |x|^2\sum_{k=0}^{p-1}e^{\frac{2k\pi i}{p}} + \cdots + |x|^{2(p-1)}\sum_{k=0}^{p-1}e^{\frac{2k(p-1)\pi i}{p}} \\ &= p. \end{aligned}$$

Z powyższych rozważań wnioskujemy, że rzeczywiście $P[f|_{\widehat{S}_p}]$ ma postać (3.13). Ponieważ $P[f|_{\widehat{S}_p}]$ jest wielomianem stopnia co najwyżej m oraz f jest wielomianem stopnia m, to q musi być wielomianem stopnia co najwyżej $m-2p$. Zauważmy jeszcze, że dla dowolnego $\zeta \in \widehat{S}_p$ jest $P[f|_{\widehat{S}_p}](\zeta) = f(\zeta)$, co kończy dowód. □

Wniosek 3.5. Żaden wielomian niezerowy pomnożony przez $|x|^{2p}$ nie jest poliharmoniczny rzędu p.

Dowód. Przypuśćmy, że teza nie jest prawdziwa i niech q będzie wielomianem stopnia m takim, że $\Delta^p(|x|^{2p}q(x)) = 0$. Wówczas z jednoznaczności rozwiązania odpowiedniego zagadnienia Dirichleta, $P_p[q|_{\widehat{S}_p}](x) = |x|^{2p}q(x)$ – sprzeczność, bo $|x|^{2p}q(x)$ jest wielomianem stopnia $m+2p$, kiedy to $P_p[q|_{\widehat{S}_p}]$ jest stopnia co najwyżej m na mocy ostatniego stwierdzenia. □

W następnym twierdzeniu będziemy korzystać z następującego lematu:

Lemat 3.6 ([2, p. 99])**.** Niech $\zeta \in S$, wtedy istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$|Z_m(x,\zeta)|_{\mathbb{C}} \leqslant Cm^{n-2}||x||^m \quad \text{dla dowolnego} \quad x \in \widehat{B}_p.$$

Możemy teraz podać związek między jądrem Poissona dla $\widehat{B}_p$ a poliharmonikami strefowymi, co doprowadzi nas do znalezienia jawnego wzoru na to jądro. Prawdziwe jest bowiem twierdzenie:

Twierdzenie 3.4. Jądro Poissona posiada następujące rozwinięcie

$$P_p(x,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m^p(x,\zeta) = \frac{1-|x|^{2p}|\overline{\zeta}|^{2p}}{(x^2\overline{\zeta}^2 - 2x\overline{\zeta}+1)^{n/2}} \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p,\ \zeta \in \widehat{S}_p. \tag{3.15}$$

Szereg powyższy zbiega bezwzględnie i jednostajnie na $K \times \widehat{S}_p$, gdzie K jest zwartym podzbiorem zbioru $\widehat{B}_p$.

Dowód. Niech $q \in \mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$. Dla dowodu pierwszej równości zauważmy, że dzięki gęstości sum poliharmonik sferycznych w $L^2(\widehat{S}_p)$ wystarczy pokazać, że

$$\langle q, P_p(\cdot,x)\rangle_{\widehat{S}_p} = \left\langle q, \sum_{k=0}^{\infty} Z_k^p(\cdot,x)\right\rangle_{\widehat{S}_p},$$

a to zachodzi ponieważ

$$\langle q, P_p(\cdot,x)\rangle_{\widehat{S}_p} = q(x) = \langle q, Z_m^p(\cdot,x)\rangle_{\widehat{S}_p} = \left\langle q, \sum_{k=0}^{\infty} Z_k^p(\cdot,x)\right\rangle_{\widehat{S}_p}.$$

Wykażemy, że szereg we wzorze (3.15) jest bezwzględnie zbieżny. Na mocy (3.9) oraz Lematu 3.6 dostajemy

$$\begin{aligned} |Z_m^p(x,\zeta)|_{\mathbb{C}} &\leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \left||x|^{2k}\right|_{\mathbb{C}} \left||\overline{\zeta}|^{2k}\right|_{\mathbb{C}} |Z_{m-2k}(x,\zeta)|_{\mathbb{C}} \\ &\leqslant C||x||^m \sum_{k=0}^{p-1} (m-2k)^{n-2} \\ &\leqslant Cpm^{n-2}||x||^m. \end{aligned}$$

Zatem dla dowolnego zwartego podzbioru K zbioru $\widehat{B}_p$ wnioskujemy, że

$$\max_{(x,\zeta)\in K\times\widehat{S}_p} \sum_{m=0}^{\infty} |Z_m^p(x,\zeta)|_{\mathbb{C}} \leqslant Cp \max_{(x,\zeta)\in K\times\widehat{S}_p} \sum_{m=0}^{\infty} m^{n-2}||x||^m.$$

Ponieważ

$$\frac{(m+1)^{n-2}}{m^{n-2}} \to 1 \ \text{ przy } \ m \to \infty,$$

to szereg w (3.15) istotnie zbiega bezwzględnie i jednostajnie.

Dla dowodu drugiej równości we wzorze (3.15) zauważmy, że z (3.9) oraz ze zbieżności szeregu w (3.15) jest

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z_m^p(x,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{\zeta}|^{2k} Z_{m-2k}(x,\zeta) = \sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{\zeta}|^{2k} \sum_{m=0}^{\infty} Z_{m-2k}(x,\zeta).$$

Ponadto, zgodnie z Uwagą 3.6, $Z_{m-2k}(x,\zeta) \equiv 0$ dla $m < 2k$. W konsekwencji otrzymujemy

$$\sum_{m=0}^{\infty} Z_m^p(x,\zeta) = \sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{\zeta}|^{2k} \sum_{m=2k}^{\infty} Z_{m-2k}(x,\zeta) = \sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{\zeta}|^{2k} \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta)$$

dla każdego $x \in \widehat{B}_p$ oraz $\zeta \in \widehat{S}_p$. Z powyższych rozważań i z (3.12) wynika, że

$$\begin{aligned} P_p(x,\zeta) &= (1+|x|^2|\overline{\zeta}|^2+\cdots+|x|^{2(p-1)}|\overline{\zeta}|^{2p-1})\frac{1-|x|^2|\overline{\zeta}|^2}{(x^2\overline{\zeta}^2-2x\overline{\zeta}+1)^{n/2}} \\ &= \frac{1-|x|^{2p}|\overline{\zeta}|^{2p}}{(x^2\overline{\zeta}^2-2x\overline{\zeta}+1)^{n/2}}, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Uwaga 3.8. Zauważmy, że $|\overline{\zeta}|^{2p} = 1$ dla $\zeta \in \widehat{S}_p$, zatem możemy pisać

$$P_p(x,\zeta) = \frac{1-|x|^{2p}}{(x^2\overline{\zeta}^2-2x\overline{\zeta}+1)^{n/2}}.$$

Podamy teraz podstawowe własności jądra Poissona dla $\widehat{B}_p$. Zebrane są one w następującym stwierdzeniu:

Stwierdzenie 3.11. Jądro Poissona P_p ma następujące własności:

(a) $\overline{P_p(\zeta,x)} = P_p(x,\zeta)$ dla dowolnego $x \in \widehat{B}_p$ i dowolnego $\zeta \in \widehat{S}_p$;

(b) dla dowolnych $x \in \widehat{B}_p$ i $\zeta \in S$ oraz $j = 0,1,\ldots,p-1$ jest

$$\overline{P_p(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta,x)} = \frac{1-|x|^{2p}}{|e^{\frac{-j\pi i}{p}}x-\zeta|^n};$$

(c) jądro Poissona $P_p(\cdot,\zeta)$ jest funkcją poliharmoniczną rzędu p na $\widehat{B}_p$ dla dowolnego $\zeta \in \widehat{S}_p$;

(d) dla dowolnego $x \in \widehat{B}_p$ oraz dla $k = 0,1,\ldots,p-1$ jest

$$\int_S P_p(e^{\frac{-k\pi i}{p}}x,\zeta)d\sigma(\zeta) = 1 + e^{\frac{-2k\pi i}{p}}|x|^2 + \cdots + e^{\frac{-2(p-1)k\pi i}{p}}|x|^{2(p-1)};$$

(e) dla dowolnego $x \in \widehat{B}_p$ jest

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_S P_p(e^{\frac{-k\pi i}{p}}x,\zeta)d\sigma(\zeta) = 1;$$

(f) jeśli $\zeta \in e^{\frac{j\pi i}{p}}S$, to $P_p(x,\zeta) > 0$ dla dowolnego $x \in e^{\frac{j\pi i}{p}}B$, $j = 0,1,\ldots,p-1$.

Dowód. Własność (a) wynika wprost z Twierdzenia 3.4 i Stwierdzenia 3.7.

Dla dowodu punktu (b) załóżmy, że $x \in \widehat{B}_p$ oraz $\zeta \in S$. Wtedy z własności (a) i z (3.15) dostajemy

$$\overline{P_p(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta, x)} = \frac{1-|x|^{2p}}{(e^{\frac{-2j\pi i}{p}}x^2\zeta^2 - 2e^{\frac{-j\pi i}{p}}x\zeta + 1)^{n/2}} = \frac{1-|x|^{2p}}{|e^{\frac{-j\pi i}{p}}x-\zeta|^n}.$$

Ponieważ $Z_m^p(\cdot,\zeta)$ jest funkcją poliharmoniczną rzędu p, to własność (c) wynika wprost z Twierdzenia 3.4.

Aby pokazać, że zachodzi (d), zauważmy najpierw, że (por. Stwierdzenie 1.2)

$$u(x) = \int_S \frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n} d\sigma(\zeta) = 1 \tag{3.16}$$

dla $x \in B$. Ponadto, na mocy Lematu 1.1, funkcja u przedłuża się analitycznie na zbiór $\widehat{B}_p$, przy czym jej przedłużenie jest określone takim samym wzorem co funkcja u. Zatem zależność (3.16) zachodzi dla wszystkich $x \in \widehat{B}_p$, a to oznacza, że

$$\int_S \frac{1-|x|^{2p}}{|x-\zeta|^n} d\sigma(\zeta) = \frac{1-|x|^{2p}}{1-|x|^2}\int_S \frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n} d\sigma(\zeta) = 1 + |x|^2 + \cdots + |x|^{2(p-1)}.$$

Zatem dla $k = 0, 1, \ldots, p-1$ mamy

$$\int_S \frac{1-|x|^{2p}}{|e^{\frac{-k\pi i}{p}}x-\zeta|^n} d\sigma(\zeta) = 1 + e^{\frac{-2k\pi i}{p}}|x|^2 + \cdots + e^{\frac{-2k(p-1)\pi i}{p}}|x|^{2(p-1)},$$

co kończy dowód punktu (d).

Dla dowodu (e) zauważmy, że z poprzedniej własności jest

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_S P_p(e^{\frac{-k\pi i}{p}}x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}(1 + e^{\frac{-2k\pi i}{p}}|x|^2 + \cdots + e^{\frac{-2(p-1)\pi i}{p}}|x|^{2(p-1)}),$$

ale

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{-2kj\pi i}{p}}|x|^{2j} = 0 \quad \text{dla} \quad j = 1, \ldots, p-1,$$

dlatego też

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_S P_p(e^{\frac{-k\pi i}{p}}x,\zeta)d\sigma(\zeta) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} 1 = 1,$$

co kończy dowód.

Własność (f) jest oczywista. □

Z definicji jądra Poissona, z własności (b) ostatniego stwierdzenia oraz z Twierdzenia 2.1 rozwiązanie zagadnienia Dirichleta z rozdziału drugiego możemy wyrazić w terminach całki Poissona:

Twierdzenie 3.5. Niech $f \in \mathcal{C}(\widehat{S}_p)$. Jeśli u jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta (2.1), tzn. $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{S}_p) \cap \mathcal{C}(\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p)$ oraz $u = f$ na $\widehat{S}_p$, to

$$u(x) = \begin{cases} P_p[f](x) & \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p, \\ f(x) & \text{dla} \quad x \in \widehat{S}_p. \end{cases} \tag{3.17}$$

Zanotujmy jeszcze kilka własności, które wykorzystamy w następnym rozdziale:

Stwierdzenie 3.12. Niech (u_n) będzie ciągiem funkcji poliharmonicznych rzędu p takim, że $u_n \rightrightarrows u$ na każdym zwartym podzbiorze zbioru $\widehat{B}_p$. Wówczas u jest funkcją poliharmoniczną rzędu p na zbiorze $\widehat{B}_p$.

Dowód. Niech (u_n) będzie ciągiem takim jak w treści Stwierdzenia 3.12 oraz niech K będzie zwartym podzbiorem zbioru $\widehat{B}_p$. Wystarczy pokazać, że u jest funkcją poliharmoniczną na $\widehat{B}_p(0,r)$ dla dowolnego $r > 0$ takiego, że $K \subset \widehat{B}_p(0,r) \subset \widehat{B}_p$. Ponieważ u_n jest funkcją poliharmoniczną na zbiorze $\widehat{B}_p(0,r)$ i ciągłą na jego domknięciu, to na mocy Wniosku 2.1 jest

$$u_n(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S \frac{r^{2p} - |x|^{2p}}{r^{2p-n}|e^{\frac{-k\pi i}{p}} x - r\zeta|^n} u_n(re^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta) d\sigma(\zeta).$$

Oczywiste jest, że istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$\left| \frac{r^{2p} - |x|^{2p}}{r^{2p-n}|e^{\frac{-k\pi i}{p}} x - r\zeta|^n} \right|_{\mathbb{C}} \leqslant M$$

dla dowolnego $x \in K$, to

$$\begin{aligned} \left| u_n(x) - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S \frac{r^{2p} - |x|^{2p}}{r^{2p-n}|e^{\frac{-k\pi i}{p}} x - r\zeta|^n} u(re^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta) d\sigma(\zeta) \right|_{\mathbb{C}} \\ \leqslant \frac{M}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S \left| u_n(re^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta) - u(re^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta) \right|_{\mathbb{C}} d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Ponieważ $u_n \rightrightarrows u$ na dowolnym podzbiorze zwartym zbioru $\widehat{B}_p$, to możemy przejść do granicy pod znakiem całki. Z powyższych rozważań wynika więc, że

$$u(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S \frac{r^{2p} - |x|^{2p}}{r^{2p-n}|e^{\frac{-k\pi i}{p}} x - r\zeta|^n} u(re^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta) d\sigma(\zeta),$$

skąd z kolei otrzymujemy, że u jest funkcją poliharmoniczną na $\widehat{B}_p(0,r)$, co kończy dowód. $\square$

Stwierdzenie 3.13. Niech $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B}_p)$, wtedy istnieją $q_m \in \mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n)$ takie, że

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x)$$

dla $x \in \widehat{B}_p$. Szereg zbiega bezwzględnie i jednostajnie na każdym podzbiorze zwartym zbioru $\widehat{B}_p$.

Dowód. Dowód jest analogiczny jak dla funkcji harmonicznych (por. [2, Corollary 5.34]). Załóżmy najpierw, że $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{S}_p) \cap \mathcal{C}(\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p)$, wtedy na mocy Twierdzenia 3.5 jest

$$\begin{aligned} u(x) &= P_p[u|_{\widehat{S}_p}](x) = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\int_S u(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta)\overline{P_p(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta, x)}\, d\sigma(\zeta) \\ &= \frac{1}{p}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p-1}\int_S u(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta)\overline{Z^p_m(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta, x)}\, d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Oznaczmy

$$q_m(x) = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\int_S u(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta)\overline{Z^p_m(e^{\frac{j\pi i}{p}}\zeta, x)}\, d\sigma(\zeta).$$

Wtedy z twierdzenia Stone'a-Weierstrassa, Wniosku 3.3 i z ortogonalności poliharmonik sferycznych (Stwierdzenie 3.5) otrzymamy, że $q_m \in \mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n)$, zatem

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x), \tag{3.18}$$

przy czym zbieżność szeregu dowodzimy tak jak w dowodzie Twierdzenia 3.4.

Niech teraz $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B}_p)$ oraz $r < 1$, z powyższych rozważań wynika, że zachodzi wzór (3.18) dla dowolnego $x \in \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{r}} B(0,r)$. Z dowolności r i jednoznaczności rozwinięcia w szereg (3.18) dostajemy tezę twierdzenia. $\square$

5 Postać jawna poliharmonik strefowych

W tej części rozdziału wyrazimy poliharmoniki strefowe w terminach wielomianów Gegenbauera, skąd wyprowadzimy dla nich wzór jawny.

Definicja 3.6. *Wielomianem Gegenbauera $C_m^\lambda(t)$ rzędu $\lambda > -\frac{1}{2}$ i stopnia m* nazywamy funkcję postaci

$$C_m^\lambda(t) = \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \frac{\Gamma(m+\lambda-k)}{k!(m-2k)!\Gamma(\lambda)} (2t)^{m-2k}, \tag{3.19}$$

gdzie Γ jest funkcją gamma Eulera.

Wielomiany Gegenbauera możemy wyrazić jako współczynniki funkcji $(1-2tw+w^2)^{-\lambda}$ w rozwinięciu Taylora względem zmiennej w, prawdziwy jest bowiem wzór generujący na $C_m^\lambda(t)$ (por. [27, wzór (4.7.23)], a także [14, wzór (7.1.2)] lub [21, wzór (5.2)]):

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^\lambda(t) w^m = (1-2tw+w^2)^{-\lambda}. \tag{3.20}$$

Powyższy wzór wykorzystamy do wyznaczenia jawnej postaci poliharmonik strefowych.

Stwierdzenie 3.14. Niech $x \in \widehat{B}_p \setminus \{0\}, \zeta \in \widehat{S}_p \setminus \{0\}$. Funkcje $P_p(x,\zeta)$ oraz $Z_m^p(x,\zeta)$ dadzą się wyrazić w terminach wielomianów Gegenbauera, mianowicie:

$$P_p(x,\zeta) = (1-|x|^{2p}|\overline{\zeta}|^{2p}) \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{n/2}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right) |x|^m |\overline{\zeta}|^m, \tag{3.21}$$

$$Z_m^p(x,\zeta) = \left[C_m^{n/2}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right) - C_{m-2p}^{n/2}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right)\right] |x|^m |\overline{\zeta}|^m. \tag{3.22}$$

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia

$$t := \frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|} \qquad \text{i} \qquad w := |x||\overline{\zeta}|. \tag{3.23}$$

Wtedy z (3.20) jest

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{n/2}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right) |x|^m |\overline{\zeta}|^m = (1-2x\overline{\zeta}+|x|^2|\overline{\zeta}|^2)^{-n/2},$$

skąd, na mocy Twierdzenia 3.4, dostajemy

$$P_p(x,\zeta) = (1-|x|^{2p}|\overline{\zeta}|^{2p}) \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{n/2}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right) |x|^m |\overline{\zeta}|^m,$$

co dowodzi równości (3.21).

Dla dowodu wzoru (3.22) zauważmy, że poliharmoniki $Z_m^p(x,\zeta)$ są wielomianami jednorodnymi stopnia m, więc z Twierdzenia 3.4 i z udowodnionej równości (3.21) wnioskujemy, że

$$Z_m^p(x,\zeta) = \left[C_m^{n/2}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right) - C_{m-2p}^{n/2}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right)\right] |x|^m |\overline{\zeta}|^m,$$

co kończy dowód stwierdzenia. □

Twierdzenie 3.6. Niech $\zeta \in \widehat{S}_p$. Zachodzi wzór

$$\begin{aligned} Z_m^p(x,\zeta) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} (-1)^k \frac{n(n+2)\dots(n+2m-2p-2k-2)}{k!2^k(m-2k)!} \\ \times [(n+2(m-p-k))\dots(n+2(m-k-1)) - (-1)^p 2(k-p+1)\dots 2k] \\ \times (x\overline{\zeta})^{m-2k}|x|^{2k}|\overline{\zeta}|^{2k} \end{aligned} \tag{3.24}$$

dla $x \in \widehat{B}_p$.

Dowód. Z ostatniego stwierdzenia wynika, że wystarczy wyznaczyć współczynniki $C_m^{n/2}$ oraz $C_{m-2p}^{n/2}$ i podstawić je do wzoru (3.22).

Niech zatem $\lambda = \frac{n}{2}$ we wzorze (3.19). Wówczas uwzględniając podstawienia (3.23) otrzymamy, że

$$C_m^{n/2}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} (-1)^k \frac{\Gamma(m+\frac{n}{2}-k)}{k!(m-2k)!\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{m-2k} (x\overline{\zeta})^{m-2k}|x|^{2k-m}|\overline{\zeta}|^{2k-m}. \tag{3.25}$$

Ponieważ

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z),$$

to

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(m-k+\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} &= \frac{(m-k+\frac{n}{2}-1)\Gamma(m-k+\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \dots \\ &= \frac{(m-k+\frac{n}{2}-1)(m-k+\frac{n}{2}-2)\dots(\frac{n}{2}+1)\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \frac{(n+2m-2k-2)(n+2m-2k-4)\dots(n+2)n}{2^{m-k}}. \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe do równania (3.25) otrzymujemy po prostych przekształceniach, że

$$C_m^{n/2}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} (-1)^k \frac{n(n+2)\dots(n+2m-2k-2)}{k!2^k(m-2k)!} (x\overline{\zeta})^{m-2k}(|x||\overline{\zeta}|)^{2k-m},$$

skąd z kolei dostajemy

$$\begin{aligned} C_{m-2p}^{n/2}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right) = \sum_{k=0}^{[\frac{m-2p}{2}]} (-1)^k \frac{n(n+2)\dots(n+2m-4p-2k-2)}{k!2^k(m-2p-2k)!} \\ \times (x\overline{\zeta})^{m-2p-2k}(|x||\overline{\zeta}|)^{2k-m+2p}. \end{aligned}$$

Zamieniając w powyższym wzorze indeks k na $k-p$ otrzymamy

$$C^{n/2}_{m-2p}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right)=\sum_{k=p}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^k\frac{n(n+2)\ldots(n+2m-2p-2k-2)}{k!2^k(m-2k)!}$$
$$\times(-1)^p2^p(k-p+1)(k-p+2)\ldots k(x\overline{\zeta})^{m-2k}(|x||\zeta|)^{2k-m}.$$

Ponieważ wyrażenie $(-1)^p2^p(k-p+1)(k-p+2)\ldots k$ znika dla $k=0,1,\ldots,p-1$, więc sumowanie w ostatnim wzorze możemy zaczynać od $k=0$:

$$C^{n/2}_{m-2p}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^k\frac{n(n+2)\ldots(n+2m-2p-2k-2)}{k!2^k(m-2k)!}$$
$$\times(-1)^p2^p(k-p+1)(k-p+2)\ldots k(x\overline{\zeta})^{m-2k}(|x||\zeta|)^{2k-m}.$$

Podstawiając odpowiednio powyższe relacje do równości (3.22) dostajemy wzór (3.24), który zachodzi dla $x\in\widehat{B}_p$ przy $\zeta\in\widehat{S}_p$ z uwagi na to, że $Z^p_m(0,\zeta)=0$. $\square$

Uwaga 3.9. Zauważmy, że Twierdzenie 3.6 daje nam przedłużenie poliharmonik strefowych $Z^p_m(\cdot,\zeta)$ na $\mathbb{C}^n$.

Warto jeszcze dodać, że harmoniki strefowe, a więc i poliharmoniki strefowe, możemy wyrazić za pomocą wielomianów Legendre'a (por. [21, Definition 2.25 oraz Theorem 2.35].

Definicja 3.7. *Wielomianem Legendre'a* stopnia m, wymiaru n nazywamy wielomian określony *formułą Rodriguesa*:

$$P_{m,n}(t)=\left(-\frac{1}{2}\right)^m\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n-1}{2}\right)}(1-t^2)^{\frac{1-n}{2}}\frac{d^m}{dt^m}(1-t^2)^{m+\frac{n-3}{2}}.$$

Podobnie jak dla wielomianów Gegenbauera, mamy wzór generujący dla wielomianów Legendre'a:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+n-2)(m+n-3)!}{m!(n-2)!}P_{m,n}(t)w^m=\frac{1-w^2}{(1-2wt+w^2)^{n/2}}.$$

Ponieważ (por. Lemat 3.3)

$$\begin{aligned}h_{m,n}&=\dim\mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n)=\binom{n+m-1}{n-1}-\binom{n+m-3}{n-1}\\&=\frac{(2m+n-2)(m+n-3)!}{m!(n-2)!},\end{aligned}$$

to uwzględniając podstawienia (3.23) i korzystając z ostatniej relacji dostaniemy

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_{m,n}|x|^m|\overline{\zeta}|^m P_{m,n}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right) = \frac{1-|x|^2|\overline{\zeta}|^2}{(1-2x\overline{\zeta}+|x|^2|\overline{\zeta}|^2)^{n/2}}.$$

Z powyższej równości i ze wzoru (3.12) na harmoniczne jądro Poissona $P(x,\zeta)$ otrzymujemy wzór na harmoniki strefowe

$$Z_m(x,\zeta) = h_{m,n}|x|^m|\overline{\zeta}|^m P_{m,n}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right),$$

skąd z kolei i z (3.9) dostajemy wzór na poliharmoniki strefowe w terminach wielomianów Legendre'a:

$$Z_m^p(x,\zeta) = \sum_{k=0}^{p-1} h_{m-2k,n}|x|^{m-2k}|\overline{\zeta}|^{m-2k} P_{m-2k,n}\left(\frac{x\overline{\zeta}}{|x||\overline{\zeta}|}\right).$$

Rozdział 4

Przestrzenie poliharmoniczne Bergmana dla $\widehat{B}_p$

W rozdziale tym będziemy się zajmować przestrzenią poliharmoniczną Bergmana dla zbioru $\widehat{B}_p$. Jest to przestrzeń funkcji poliharmonicznych rzędu p, całkowalnych z kwadratem na $\widehat{B}_p$. Pokażemy, że przestrzeń ta jest przestrzenią Hilberta i wyprowadzimy wzór na jądro reprodukujące dla tej przestrzeni, zwane jądrem Bergmana. Ponadto w rozdziale tym wprowadzimy tzw. przestrzenie Bergmana z wagami. I tutaj także wykażemy, że przestrzeń ta jest przestrzenią Hilberta oraz wyprowadzimy odpowiednie wzory na jądro reprodukujące dla tej przestrzeni.

1 Przestrzeń poliharmoniczna Bergmana

Rozważmy funkcje poliharmoniczne rzędu p na zbiorze $\widehat{B}_p$ takie, że

$$||u||_{b_p^2} := \left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B \left|u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\right|_{\mathbb{C}}^2 dy\right)^{1/2} < \infty.$$

Zauważmy, że powyższy warunek ma sens, bo każda funkcja poliharmoniczna przedłuża się na dowolną kulę obróconą (por. 1.1). Rodzinę funkcji poliharmonicznych, które spełniają powyższy warunek nazywamy *poliharmoniczną przestrzenią Bergmana*, w skrócie przestrzenią Bergmana, i oznaczamy symbolem $b^2_p(\widehat{B}_p)$. Mamy więc

$$b^2_p(\widehat{B}_p) := \mathcal{A}_{\Delta^p}(B) \cap L^2(\widehat{B}_p).$$

W szczególnym przypadku, jeśli $p = 1$, to $b^2(B) := b^2_1(B)$ jest klasyczną przestrzenią harmoniczną Bergmana dla kuli (por. rozdział 8 w [2]). Tak jak w przypadku harmonicznej przestrzeni Bergmana, będziemy chcieli pokazać, że $b^2_p(\widehat{B}_p)$ jest również przestrzenią Hilberta z odpowiednim iloczynem skalarnym. W tym celu wykorzystamy następującą wersję własności wartości średniej dla funkcji poliharmonicznej:

Lemat 4.1 (Mean value property, [22, Lemma 5])**.** Niech $K \subset B$ będzie zbiorem zwartym, wtedy istnieje stała $C = C(K, n, p)$ taka, że

$$|u(x)|^2_{\mathbb{C}} \leqslant C \int\limits_B |u(y)|^2_{\mathbb{C}} dy$$

dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B)$ i dowolnego $x \in K$.

Pokażemy, że:

Stwierdzenie 4.1. Niech $K \subset \widehat{B}_p$ będzie zbiorem zwartym, wtedy istnieje stała $C = C(K, n, p)$ taka, że

$$|u(x)|_{\mathbb{C}} \leqslant C||u||_{b^2_p}$$

dla dowolnej funkcji $u \in b^2_p(\widehat{B}_p)$ i dowolnego $x \in K$.

Dowód. Niech $K \subset B$ będzie zwarty oraz $j = 0, 1, \ldots, p-1$. Na mocy Lematu 1.1 i Lematu 4.1 istnieje stała dodatnia $\tilde{C} = \tilde{C}(K, n, p)$ taka, że dla każdego $x \in K$ mamy

$$|u(e^{\frac{j\pi i}{p}} x)|^2_{\mathbb{C}} \leqslant \tilde{C} \int\limits_B |u(e^{\frac{j\pi i}{p}} y)|^2_{\mathbb{C}} dy.$$

W szczególności

$$|u(e^{\frac{j\pi i}{p}} x)|^2_{\mathbb{C}} \leqslant \tilde{C} \int\limits_B |u(e^{\frac{j\pi i}{p}} y)|^2_{\mathbb{C}} dy + \tilde{C} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{p-1} \int\limits_B |u(e^{\frac{k\pi i}{p}} y)|^2_{\mathbb{C}} dy.$$

Zatem

$$|u(x)|^2_{\mathbb{C}} \leqslant \tilde{C} \sum_{k=0}^{p-1} \int\limits_B |u(e^{\frac{k\pi i}{p}} y)|^2_{\mathbb{C}} dy = \tilde{C} p ||u||^2_{b^2_p},$$

skąd ostatecznie

$$|u(x)|_{\mathbb{C}} \leqslant C||u||_{b^2_p},$$

gdzie $C = (\tilde{C}p)^{\frac{1}{2}}$, co kończy dowód. ∎

Stwierdzenie 4.2. Przestrzeń Bergmana $b_p^2(\widehat{B}_p)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $L^2(\widehat{B}_p)$ z iloczynem skalarnym:

$$\langle u, v\rangle_{b_p^2} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\overline{v(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)}\,dy. \tag{4.1}$$

Dowód. Dowód jest analogiczny jak dla $p = 1$ (por. [2, Corollary 8.3]). Niech (u_n) będzie ciągiem Cauchy'ego w $b_p^2(\widehat{B}_p)$. Ponieważ $b_p^2(\widehat{B}_p) \subset L^2(\widehat{B}_p)$, to z zupełności przestrzeni $L^2(\widehat{B}_p)$ istnieje $u \in L^2(\widehat{B}_p)$ takie, że $u_n \to u$ przy $n \to \infty$. Musimy pokazać, że funkcja u jest poliharmoniczna. Na mocy Stwierdzenia 4.1 jest $|u_n(x) - u_m(x)| \leqslant C||u_n - u_m||_{b_p^2}$ dla dowolnego $x \in K$, gdzie K jest zwartym podzbiorem zbioru $\widehat{B}_p$. Otrzymujemy zatem, że u_n jest również ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{C}(K)$, skąd z kolei wynika, że istnieje $v \in \mathcal{C}(K)$ takie, że $u_n \rightrightarrows v$ jednostajnie na K. Ze Stwierdzenia 3.12 wnioskujemy, że funkcja v jest poliharmoniczna na $\widehat{B}_p$.

Z drugiej strony ponieważ $u_n \to u$ w $L^2(\widehat{B}_p)$, to istnieje podciąg u_{n_k} zbieżny punktowo do u prawie wszędzie na $\widehat{B}_p$. Stąd i z wcześniejszej części dowodu wynika, że $u = v$ prawie wszędzie na $\widehat{B}_p$, tzn. $u \in b_p^2(\widehat{B}_p)$. □

Wniosek 4.1. Przestrzeń Bergmana $b_p^2(\widehat{B}_p)$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym (4.1).

2 Jądro poliharmoniczne Bergmana

Niech $x \in \widehat{B}_p$ będzie ustalonym punktem. Rozważmy funkcjonał liniowy $\Lambda_x : b_p^2(\widehat{B}_p) \to \mathbb{C}$ postaci $\Lambda_x(u) = u(x)$. Na mocy Stwierdzenia 4.1, funkcjonał Λ_x jest ograniczony. Ponieważ $b_p^2(\widehat{B}_p)$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym (4.1), to na mocy twierdzenia Riesza istnieje jednoznacznie określona funkcja $r_x \in b_p^2(\widehat{B}_p)$ taka, że

$$u(x) = \langle u, r_x\rangle_{b_p^2} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\overline{r_x(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)}\,dy$$

dla dowolnej funkcji $u \in b_p^2(\widehat{B}_p)$.

Definicja 4.1. Funkcję $R_p(x, y) := \overline{r_x(y)}$, $x, y \in \widehat{B}_p$ nazywamy *poliharmonicznym jądrem Bergmana*, lub krótko *jądrem Bergmana*, dla $\widehat{B}_p$.

Dla $u \in b^2_p(\widehat{B}_p)$ oraz $x \in \widehat{B}_p$ mamy więc

$$u(x) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int\limits_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)R_p(x, e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\,dy. \tag{4.2}$$

Gdy $p = 1$, to funkcja $R(x, y) := R_1(x, y)$ jest harmonicznym jądrem Bergmana. Jądro to wyraża się wzorem (por. [2, Theorem 8.9]):

$$R(x, y) = \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{m=0}^{\infty}(n + 2m)Z_m(x, y) \quad \text{dla} \quad x, y \in B.$$

Korzystając z Lematu 1.1 możemy przedłużyć funkcję $R(x, y)$ na $\widehat{B}_p \times \widehat{B}_p$.

Stwierdzenie 4.3. Jądro Bergmana ma następujące własności:
(1) $R_p(x, y) = \overline{R_p(y, x)}$,
(2) $||R_p(x, \cdot)||^2_{b^2_p} = R_p(x, x)$ dla $x \in \widehat{B}_p$,
(3) odwzorowanie $Q : L^2(\widehat{B}_p) \to b^2_p(\widehat{B}_p)$ postaci

$$Q[u](x) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int\limits_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)R_p(x, e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\,dy \qquad \text{dla} \;\; u \in L^2(\widehat{B}_p), \;\; x \in \widehat{B}_p$$

jest jednoznacznie określonym rzutem ortogonalnym przestrzeni $L^2(\widehat{B}_p)$ na $b^2_p(\widehat{B}_p)$.

Dowód. Dowód jest analogiczny jak dla przypadku $p = 1$ (por. [2, Proposition 8.4]). Ponieważ $L^2(\widehat{B}_p)$ jest przestrzenią ośrodkową Hilberta, to również przestrzeń Bergmana $b^2_p(\widehat{B}_p)$ jest ośrodkowa (jako domknięta podprzestrzeń przestrzeni $L^2(\widehat{B}_p)$), zatem $b^2_p(\widehat{B}_p)$ posiada bazę co najwyżej przeliczalną. Niech więc $u_1, u_2, \ldots$ będzie bazą ortonormalną dla $b^2_p(\widehat{B}_p)$, wtedy dla dowolnego $x \in \widehat{B}_p$ jest

$$R_p(x, \cdot) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle R_p(x, \cdot), u_k\rangle_{b^2_p} u_k = \sum_{k=1}^{\infty}\overline{u_k(x)}u_k,$$

przy czym w drugiej równości korzystamy z (4.2), zaś szereg zbiega w normie przestrzeni $b^2_p(\widehat{B}_p)$. Ponieważ funkcjonał $u \mapsto u(y)$ jest ciągły (bo ograniczony), to również

$$R_p(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty}\overline{u_k(x)}u_k(y) = \overline{\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)\overline{u_k(y)}} = \overline{R_p(y, x)},$$

co dowodzi własność (1).

Dla dowodu (2) mamy

$$\begin{aligned}
||R_p(x,\cdot)||^2_{b^2_p} &= \langle R_p(x,\cdot), R_p(x,\cdot)\rangle_{b^2_p} \\
&= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int\limits_B R_p(x, e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\overline{R_p(x, e^{\frac{k\pi i}{p}}y)}\, dy \\
&= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int\limits_B \overline{R_p(x, e^{\frac{k\pi i}{p}}y)}R_p(x, e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\, dy \\
&= \overline{R_p(x,x)} = R_p(x,x).
\end{aligned}$$

Wykażemy teraz własność (3). Ponieważ przestrzeń Bergmana $b^2_p(\widehat{B}_p)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $L^2(\widehat{B}_p)$, to istnieje jednoznacznie określony rzut ortogonalny $Q : L^2(\widehat{B}_p) \to b^2_p(\widehat{B}_p)$. Ze wzoru (4.2), z udowodnionej własności (1) i z własności rzutu ortogonalnego dostajemy dla dowolnego $u \in L^2(\widehat{B}_p)$ i dowolnego $x \in \widehat{B}_p$:

$$\begin{aligned}
Q[u](x) &= \langle Q[u], R_p(\cdot,x)\rangle_{b^2_p} = \langle u, Q[R_p(\cdot,x)]\rangle_{b^2_p} = \langle u, R_p(\cdot,x)\rangle_{b^2_p} \\
&= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int\limits_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)R_p(x, e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\, dy,
\end{aligned}$$

gdzie w trzeciej równości skorzystaliśmy z tego, że $R_p(\cdot,x) \in b^2_p(\widehat{B}_p)$. □

Naszym celem będzie teraz wyznaczenie wzoru na jądro Bergmana. Skorzystamy z poliharmonik strefowych. Przypomnijmy, dla $x \in \widehat{B}_p$ i $\eta \in \widehat{S}_p$ jest:

$$Z^p_m(x,\eta) = \sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{\eta}|^{2k} Z_{m-2k}(x,\eta) \tag{4.3}$$

oraz dla $q \in \mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n)$ jest

$$q(x) = \int\limits_S q(\zeta) Z^p_m(x,\zeta) d\sigma(\zeta) \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p. \tag{4.4}$$

Tak jak w rozdziale 3, przedłużamy poliharmoniki strefowe z $\widehat{B}_p \times \widehat{S}_p$ na $\widehat{B}_p \times \widehat{B}_p$:

$$Z^p_m(x,y) = \sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{y}|^{2k} Z_{m-2k}(x,y). \tag{4.5}$$

Rozważmy teraz poliharmoniczne jądro Poissona $P_p(x,\zeta)$. Jak wiadomo z poprzedniego rozdziału (por. Twierdzenie 3.4) funkcja ta określona jest następująco:

$$P_p(x,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} Z^p_m(x,\zeta) = \frac{1-|x|^{2p}}{(|x|^2|\overline{\zeta}|^2 - 2x\overline{\zeta} + 1)^{n/2}} \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p,\ \zeta \in \widehat{S}_p.$$

Z powyższego i z (4.5) wynika, że możemy jądro Poissona przedłużyć na $\widehat{B}_p \times \widehat{B}_p$:

$$\begin{aligned} P_p(x,y) : &= \sum_{m=0}^{\infty} Z_m^p(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m^p\left(x|\overline{y}|, \frac{y}{|y|}\right) \\ &= P_p\left(x|\overline{y}|, \frac{y}{|y|}\right) = \frac{1-|x|\overline{y}||^{2p}}{(1-2x|\overline{y}|\frac{\overline{y}}{|\overline{y}|} + |x|\overline{y}||^2|\frac{\overline{y}}{|\overline{y}|}|^2)^{n/2}}, \end{aligned}$$

skąd ostatecznie dostajemy

$$P_p(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m^p(x,y) = \frac{1-|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p}}{(1-2x\overline{y}+|x|^2|\overline{y}|^2)^{n/2}}. \tag{4.6}$$

Zauważmy jeszcze, że

$$Z_m^p(x,y) = \overline{Z_m^p(y,x)},$$

$$P_p(x,y) = \overline{P_p(y,x)}.$$

Stwierdzenie 4.4. Niech $m \neq l$ oraz $u \in \mathcal{H}_p^m(\mathbb{C}^n)$, $v \in \mathcal{H}_p^l(\mathbb{C}^n)$. Wtedy $\langle u, v\rangle_{b_p^2}$=0.

Dowód. Przechodząc do współrzędnych biegunowych w definicji iloczynu skalarnego dostaniemy

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle_{b_p^2} &= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\overline{v(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)}\,dy \\ &= \frac{n\Omega_n}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_0^1 r^{n-1}\int_S u(e^{\frac{k\pi i}{p}}r\zeta)\overline{v(e^{\frac{k\pi i}{p}}r\zeta)}\,d\sigma(\zeta)dr \\ &= \frac{n\Omega_n}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_0^1 r^{n-1+m+l}\int_S u(e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta)\overline{v(e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta)}\,d\sigma(\zeta)dr = 0, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej równości korzystamy z ortogonalności poliharmonik strefowych na $\widehat{S}_p$ (por. Stwierdzenie 3.5). □

Stwierdzenie 4.5. Niech $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\mathbb{C}^n)$ będzie wielomianem stopnia M, wówczas

$$u(x) = \frac{1}{pn\Omega_n}\sum_{m=0}^{M}(n+2m)\sum_{k=0}^{p-1}\int_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)Z_m^p(x, e^{\frac{k\pi i}{p}}y)dy \quad \text{dla} \quad x \in \widehat{B}_p.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $u \in \mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n)$. Wtedy

$$u(x) = \int_S u(\zeta)Z_m^p(x,\zeta)d\sigma(\zeta)$$

dla dowolnego $x \in \widehat{B}_p$. Dalej jest

$$\begin{aligned}\int\limits_B u(y)Z_m^p(x,y)dy &= n\Omega_n \int\limits_0^1 r^{n-1} \int\limits_S u(r\zeta)Z_m^p(x,r\zeta)d\sigma(\zeta)dr \\ &= n\Omega_n \int\limits_0^1 r^{2m+n-1}\left[\int\limits_S u(\zeta)Z_m^p(x,\zeta)d\sigma(\zeta)\right]dr \\ &= n\Omega_n u(x)\int\limits_0^1 r^{2m+n-1}dr = \frac{n\Omega_n}{n+2m}u(x),\end{aligned}$$

skąd dostajemy

$$u(x) = \frac{n+2m}{n\Omega_n}\int\limits_B u(y)Z_m^p(x,y)dy.$$

Z jednorodności otrzymujemy

$$u(x) = \frac{n+2m}{pn\Omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}\int\limits_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)Z_m^p(x,e^{\frac{k\pi i}{p}}y)dy.$$

Niech teraz $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\mathbb{C}^n)$ będzie wielomianem stopnia M, wtedy u jest sumą wielomianów jednorodnych, skąd na mocy Stwierdzenia 4.4 i z ostatniej równości otrzymujemy tezę. □

Stwierdzenie 4.6. Rodzina wielomianów poliharmonicznych jest gęstym podzbiorem przestrzeni Bergmana $b_p^2(\widehat{B}_p)$.

Dowód. Dowód jest analogiczny jak dla $p = 1$, (por. [2, Lemma 8.8]). Załóżmy najpierw, że $u \in b_p^2(\widehat{B}_p) \cap C(\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p)$. Niech $r \in (0,1)$. Rozważmy funkcję $u_r(x) := u(rx)$, $x \in \widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p$. Wtedy $u_r \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B}(0,\frac{1}{r}))$, w szczególności $u_r \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B}_p) \cap C(\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p)$. Ponadto $u_r \to u$, gdy $r \to 1$. Z kolei z jednostajniej ciągłości funkcji u dostajemy, że ciąg $(u_r - u)$ z $r = 1 - \frac{1}{n}$ jest wspólnie ograniczony dla odpowiednio dużych n. W konsekwencji z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej wynika, że $u_r \to u$ w $L^2(\widehat{B}_p)$ (por. [25, Theorem 11.32]). Z kolei na mocy Stwierdzenia 3.13 funkcje poliharmoniczne u_r możemy przybliżać jednostajnie wielomianami poliharmonicznymi na $\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p$, bo $u_r \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B}(0,\frac{1}{r}))$ i $r < 1$. Stąd i z wcześniejszych rozważań wynika więc teza.

Niech teraz $u \in b_p^2(\widehat{B}_p)$. Ponieważ $C(\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p)$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni $L^2(\widehat{B}_p)$ (por. [25, Theorem 11.38]), to z powyższych rozważań dostajemy tezę stwierdzenia. □

Twierdzenie 4.1. Poliharmoniczne jądro Bergmana dane jest wzorem

$$R_p(x,y) = \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{m=0}^{\infty}(n+2m)Z_m^p(x,y),$$

przy czym szereg zbiega bezwzględnie i jednostajnie na $K \times \widehat{B}_p$ dla dowolnego zwartego podzbioru $K \subset \widehat{B}_p$.

Dowód. Z równości (4.2) i ze Stwierdzeń 4.5 i 4.6 wynika, że musimy jedynie pokazać zbieżność szeregu.

Przypomnijmy, że jeśli $\zeta \in \widehat{S}_p$, to istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$|Z_m^p(x,\zeta)|_{\mathbb{C}} \leqslant Cpm^{n-2}||x||^m$$

dla każdego $x \in \widehat{B}_p$ (por. dowód Twierdzenia 3.4). Zatem

$$|Z_m^p(x,y)|_{\mathbb{C}} = ||\overline{y}|^m|_{\mathbb{C}}|Z_m^p(x,y/|y|)|_{\mathbb{C}} \leqslant Cpm^{n-2}||x||^m||\overline{y}|^m \leqslant Cpm^{n-2}||x||^m,$$

skąd

$$\max_{(x,y)\in K\times\widehat{B}_p} \sum_{m=0}^{\infty}(n+2m)|Z_m^p(x,y)|_{\mathbb{C}} \leqslant Cp \max_{(x,y)\in K\times\widehat{B}_p} \sum_{m=0}^{\infty}(n+2m)m^{n-2}||x||^m,$$

ale

$$\frac{(n+2(m+1))(m+1)^{n-2}}{(n+2m)m^{n-2}} \to 1 \quad \text{przy} \quad m \to \infty,$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 4.2. Poliharmoniczne jądro Bergmana dane jest wzorem:

$$\begin{aligned} R_p(x,y) &= \frac{1}{n\Omega_n}\left(nP_p(x,y) + \frac{d}{dt}P_p(tx,ty)\Big|_{t=1}\right) \\ &= \frac{(n-4p)|x|^{2p+2}|\overline{y}|^{2p+2} + (8px\overline{y} - n - 4p)|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p} + n(1-|x|^2|\overline{y}|^2)}{n\Omega_n(1-2x\overline{y}+|x|^2|\overline{y}|^2)^{n/2+1}}. \end{aligned}$$

Dowód. Z jednorodności poliharmonik strefowych jest

$$2mZ_m^p(x,y) = \frac{d}{dt}t^{2m}Z_m^p(x,y)\Big|_{t=1} = \frac{d}{dt}Z_m^p(tx,ty)\Big|_{t=1}.$$

Ponadto z (4.6) mamy

$$P_p(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m^p(x,y).$$

Z powyższych wzorów i z Twierdzenia 4.1 dostajemy

$$\begin{aligned} R_p(x,y) &= \frac{1}{n\Omega_n}\left(\sum_{m=0}^{\infty} nZ_m^p(x,y) + \sum_{m=0}^{\infty} 2mZ_m^p(x,y)\right) \\ &= \frac{1}{n\Omega_n}\left(\sum_{m=0}^{\infty} nZ_m^p(x,y) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dt}Z_m^p(tx,ty)\Big|_{t=1}\right) \\ &= \frac{1}{n\Omega_n}\left(nP_p(x,y) + \frac{d}{dt}P_p(tx,ty)\Big|_{t=1}\right), \end{aligned}$$

o co chodziło. Przechodzimy do dowodu drugiej równości twierdzenia. Znowu ze wzoru (4.6) jest

$$P_p(x,y) = \frac{1-|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p}}{(1-2x\overline{y}+|x|^2|\overline{y}|^2)^{n/2}},$$

więc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P_p(tx,ty)\Big|_{t=1} &= \frac{d}{dt}\frac{1-t^{4p}|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p}}{(1-2t^2x\overline{y}+t^4|x|^2|\overline{y}|^2)^{n/2}}\Big|_{t=1} \\
&= \frac{(-4pt^{4p-1}|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p})(t^4|x|^2|\overline{y}|^2-2t^2x\overline{y}+1)^{n/2}}{(1-2t^2x\overline{y}+t^4|x|^2|\overline{y}|^2)^n}\Big|_{t=1} \\
&- \frac{\frac{1}{2}n(1-t^{4p}|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p})(-4tx\overline{y}+4t^3|x|^2|\overline{y}|^2)(1-2t^2x\overline{y}+t^4|x|^2|\overline{y}|^2)^{n/2-1}}{(1-2t^2x\overline{y}+t^4|x|^2|\overline{y}|^2)^n}\Big|_{t=1} \\
&= \frac{2n(1-|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p})(x\overline{y}-|x|^2|\overline{y}|^2)-4p|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p}(|x|^2|\overline{y}|^2-2x\overline{y}+1)}{(1-2x\overline{y}+|x|^2|\overline{y}|^2)^{n/2+1}}
\end{aligned}$$

oraz

$$nP_p(x,y) = \frac{n-n|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p}-2nx\overline{y}+2nx\overline{y}|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p}+n|x|^2|\overline{y}|^2-n|x|^{2p+2}|\overline{y}|^{2p+2}}{(1-2x\overline{y}+|x|^2|\overline{y}|^2)^{n/2+1}}.$$

Dodając ostatnie dwie równości do siebie otrzymujemy żądany wzór. □

W następnym twierdzeniu wyrażamy jądro Bergmana w terminach harmonicznego jądra Bergmana $R(x,y)$ i harmonicznego jądra Poissona $P(x,y)$ – funkcję $P(x,\zeta)$ przedłużamy z $B\times S$ na $B\times B$ tak jak poliharmoniczne jądro Poissona $P_p(x,\zeta)$, z kolei stosując Lemat 1.1 możemy $P(x,y)$ przedłużyć z $B\times B$ na $\widehat{B}_p\times\widehat{B}_p$.

Twierdzenie 4.3. Poliharmoniczne jądro Bergmana jest postaci

$$R_p(x,y) = \frac{1-|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p}}{1-|x|^2|\overline{y}|^2}R(x,y) + \frac{1}{n\Omega_n}\frac{d}{dt}\left(\frac{1-|tx|^{2p}|t\overline{y}|^{2p}}{1-|tx|^2|t\overline{y}|^2}\right)\Big|_{t=1}P(x,y). \tag{4.7}$$

Dowód. Z Twierdzenia 4.1 i ze wzoru (4.5) jest

$$\begin{aligned}
R_p(x,y) &= \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{m=0}^{\infty}(n+2m)Z_m^p(x,y) \\
&= \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}|x|^{2k}|\overline{y}|^{2k}\sum_{m=-2k}^{\infty}(n+2m+4k)Z_m(x,y) \\
&= \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}|x|^{2k}|\overline{y}|^{2k}\sum_{m=0}^{\infty}(n+2m+4k)Z_m(x,y) \\
&= \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}|x|^{2k}|\overline{y}|^{2k}\sum_{m=0}^{\infty}(n+2m)Z_m(x,y) \\
&\quad+\frac{1}{n\Omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}4k|x|^{2k}|\overline{y}|^{2k}\sum_{m=0}^{\infty}Z_m(x,y).
\end{aligned}$$

Korzystając z Twierdzenia 3.4 oraz z Twierdzenia 4.1 z $p = 1$ otrzymujemy

$$R_p(x,y) \quad = \quad \sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{y}|^{2k} R(x,y) + \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{k=0}^{p-1} 4k|x|^{2k}|\overline{y}|^{2k} P(x,y).$$

Ponieważ

$$\sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{y}|^{2k} = \frac{1-|x|^{2p}|\overline{y}|^{2p}}{1-|x|^2|\overline{y}|^2}$$

oraz

$$\sum_{k=0}^{p-1} 4k|x|^{2k}|\overline{y}|^{2k} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{p-1} |tx|^{2k}|t\overline{y}|^{2k}\right)\Bigg|_{t=1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1-|tx|^{2p}|t\overline{y}|^{2p}}{1-|tx|^2|t\overline{y}|^2}\right)\Bigg|_{t=1},$$

więc dowód jest zakończony. □

Uwaga 4.1. Zauważmy jeszcze, że wzór na jądro Bergmana możemy wyrazić w taki sposób:

$$R_p(x,y) = \frac{P_p(x,y)}{P(x,y)} R(x,y) + \frac{1}{n\Omega_n}\frac{d}{dt}\left(\frac{P_p(tx,ty)}{P(tx,ty)}\right)\Bigg|_{t=1} P(x,y).$$

3 Poliharmoniczna przestrzeń ważona Bergmana i jądro ważone Bergmana

Niech $\alpha + n > 0$ oraz $\beta > -1$. Rozważmy rodzinę funkcji poliharmonicznych rzędu p określonych na B takich, że

$$||u||_{b^2_{p,\alpha,\beta}} := \left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B \left|u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\right|^2_{\mathbb{C}} |y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy\right)^{1/2} < \infty. \tag{4.8}$$

Tak określoną rodzinę nazywamy *poliharmoniczną przestrzeń ważoną Bergmana z wagami* α, β i oznaczamy ją symbolem $b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p)$. Mamy więc

$$b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p) := \mathcal{A}_{\Delta^p}(B) \cap L^2(\widehat{B}_p, |y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy),$$

gdzie $L^2(\widehat{B}_p, |y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy)$ jest przestrzenią funkcji mierzalnych na $\widehat{B}_p$, które spełniają warunek (4.8).

Lemat 4.2 ([28, Introduction])**.** Dla dowolnego zwartego zbioru $K \subset B$ istnieje stała $C = C(K,n,p)$ taka, że

$$|u(x)|^2_{\mathbb{C}} \leqslant C\int_B |u(y)|^2_{\mathbb{C}} |y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy$$

dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B) \cap L^2(B, |y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy)$ i dla dowolnego $x \in K$.

Stwierdzenie 4.7. Dla dowolnego zwartego $K \subset \widehat{B}_p$ istnieje stała $C = C(K, n, p)$ taka, że

$$|u(x)|_{\mathbb{C}} \leqslant C||u||_{b^2_{p,\alpha,\beta}}$$

dla dowolnej funkcji $u \in b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p)$ i dla dowolnego $x \in K$.

Dowód. Dowód wynika z Lematu 4.2 i jest analogiczny do dowodu Stwierdzenia 4.1. □

Wniosek 4.2. Przestrzeń ważona Bergmana $b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p)$ jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $L^2(\widehat{B}_p, |y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy)$ z iloczynem skalarnym

$$\langle u, v\rangle_{b^2_{p,\alpha,\beta}} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\overline{v(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)}|y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy. \tag{4.9}$$

Dowód. Dowód jest analogiczny jak dla przestrzeni $b^2_p(\widehat{B}_p)$. □

Na mocy powyższego wniosku, przestrzeń ważona Bergmana $b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p)$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym (4.9). Tak jak w przypadku przestrzeni nieważonej Bergmana, wyznaczymy funkcję reprodukującą dla przestrzeni ważonej Bergmana. Niech $x \in \widehat{B}_p$ będzie ustalonym punktem. Rozważmy funkcjonał liniowy $\Lambda : b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p) \to \mathbb{C}$ postaci $\Lambda_x(u) = u(x)$. Wówczas, na mocy Wniosku 4.2 i z twierdzenia Riesza, istnieje funkcja $r_{x,p,\alpha,\beta} \in b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p)$ taka, że dla dowolnej funkcji $u \in b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p)$ zachodzi wzór

$$u(x) = \langle u, r_{x,p,\alpha,\beta}\rangle_{b^2_{p,\alpha,\beta}} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)\overline{r_{x,p,\alpha,\beta}(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)}|y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy.$$

Definicja 4.2. Funkcję $R_{p,\alpha,\beta}(x,y) := \overline{r_{x,p,\alpha,\beta}(y)}$ nazywamy *poliharmonicznym jądrem ważonym Bergmana.*

Dla $u \in b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p)$ i dla $x \in \widehat{B}_p$ mamy więc

$$u(x) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)R_{p,\alpha,\beta}(x, e^{\frac{k\pi i}{p}}y)|y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy. \tag{4.10}$$

Zauważmy, że na mocy Lematu 1.1 harmoniczne jądro ważone Bergmana $R_{1,\alpha,\beta}(x,y)$ możemy przedłużyć z $B \times B$ na $\widehat{B}_p \times \widehat{B}_p$.

Nietrudno zauważyć, że analogiczne własności podane w Stwierdzeniach 4.3, 4.4 i 4.6 zachodzą w przypadku przestrzeni Bergmana z wagami.

Stwierdzenie 4.8. Jądro ważone Bergmana ma następujące własności:

(1) $R_{p,\alpha,\beta}(x,y) = \overline{R_{p,\alpha,\beta}(y,x)}$,

(2) $||R_{p,\alpha,\beta}(x,\cdot)||_{b^2_{p,\alpha,\beta}} = R_{p,\alpha,\beta}(x,x)$ dla $x \in \widehat{B}_p$,

(3) odwzorowanie $Q : L^2(\widehat{B}_p, |y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy) \to b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p)$ postaci

$$Q[u](x) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)R_{p,\alpha,\beta}(x,e^{\frac{k\pi i}{p}}y)|y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta\, dy$$

dla $u \in L^2(\widehat{B}_p), x \in \widehat{B}_p$ jest jednoznacznie określonym rzutem ortogonalnym przestrzeni $L^2(\widehat{B}_p, |y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy)$ na $b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p)$.

Dowód. Dowód analogiczny jak dla Stwierdzenia 4.3. □

Stwierdzenie 4.9. Niech $m \neq l$ oraz $u \in \mathcal{H}^m_p(\mathbb{C}^n)$, $v \in \mathcal{H}^l_p(\mathbb{C}^n)$, wtedy $\langle u,v\rangle_{b^2_{p,\alpha,\beta}}$=0.

Dowód. Dowód przebiega analogicznie jak dla Stwierdzenia 4.4. □

Stwierdzenie 4.10. Niech u będzie wielomianem stopnia M. Wtedy

$$u(x) = \sum_{m=0}^{M}\frac{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{pn\Omega_n\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{\alpha+n}{2})}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)Z^p_m(x,e^{\frac{k\pi i}{p}}y)|y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy.$$

Dowód. Dowód jest podobny do dowodu Stwierdzenia 4.5. Zakładamy najpierw, że $u \in \mathcal{H}^p_m(\mathbb{C}^n)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\int_B u(y)Z^p_m(x,y)|y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy &= n\Omega_n\int_0^1 r^{n+2m+\alpha-1}(1-r^2)^\beta\int_S u(\zeta)Z^p_m(x,\zeta)d\zeta dr\\ &= n\Omega_n u(x)\int_0^1 r^{n+2m+\alpha-1}(1-r^2)^\beta dr\\ &= n\Omega_n\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}u(x),\end{aligned}$$

stąd

$$u(x) = \frac{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{n\Omega_n\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}\int_B u(y)Z^p_m(x,y)|y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy.$$

Ze Stwierdzenia 4.9 dostaniemy zatem

$$u(x) = \frac{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{pn\Omega_n\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}\sum_{k=0}^{p-1}\int_B u(e^{\frac{k\pi i}{p}}y)Z^p_m(x,e^{\frac{k\pi i}{p}}y)|y|^\alpha(1-|y|^2)^\beta dy.$$

Załóżmy teraz, że u jest wielomianem stopnia M, wówczas u daje się przedstawić jako suma wielomianów jednorodnych stopnia co najwyżej M. Stąd i z ostatniej równości oraz ze Stwierdzenia 4.9 od razu otrzymujemy żądaną równość. □

Stwierdzenie 4.11. Rodzina wielomianów poliharmonicznych jest gęstym podzbiorem przestrzeni Bergmana $b^2_{p,\alpha,\beta}(\widehat{B}_p)$.

Dowód. Dowód jest analogiczny jak dla Stwierdzenia 4.6. □

Twierdzenie 4.4. Ważone jądro Bergmana wyraża się wzorem

$$R_{p,\alpha,\beta}(x,y) = \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}Z^p_m(x,y),$$

gdzie szereg zbiega bezwzględnie i jednostajnie na $K \times \widehat{B}_p$ dla dowolnego zwartego podzbioru $K \subset \widehat{B}_p$.

Dowód. Ze Stwierdzeń 4.10 i 4.11 oraz równości (4.10) dostajemy żądany wzór. Wystarczy zatem pokazać jedynie zbieżność szeregu. Tak jak w dowodzie Twierdzenia 4.1 mamy

$$\max_{(x,y)\in K\times\widehat{B}_p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}|Z^p_m(x,y)|_{\mathbb{C}}$$
$$\leqslant Cp\max_{(x,y)\in K\times\widehat{B}_p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}m^{n-2}||x||^m.$$

Ponadto

$$\frac{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+1)}\cdot\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}$$
$$=\frac{n+2m+\alpha+2\beta+2}{n+2m+\alpha}\to 1 \quad \text{przy} \quad m\to\infty,$$

co kończy dowód. □

Podamy teraz odpowiednik Twierdzenia 4.2 dla ważonego jądra Bergmana. W tym celu wykorzystamy pochodne ułamkowe (zob. na przykład [24]). Przypomnijmy odpowiednie definicje.

Niech $l > 0$, dla funkcji $u \in L^1(0,1)$ definiujemy funkcję pierwotną:

$$D^{-l}u(t) = \frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^1\frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-l}}d\tau.$$

Z kolei pochodną rzędu l dla funkcji u definiujemy następująco

$$D^l u(t) = \frac{d^j}{dt^j}\left(D^{-(j-l)}u(t)\right),$$

gdzie j jest liczbą całkowitą taką, że $j-1 \leqslant l \leqslant j$.

Tak jak w przypadku harmonicznego ważonego jądra Bergmana (por. [24]), korzystając ze wzoru

$$D^{l+1}t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-l)}t^{k-l-1} \tag{4.11}$$

wyprowadzimy kolejny wzór na ważone jądro Bergmana.

Twierdzenie 4.5. Ważone jądro poliharmoniczne Bergmana wyraża się wzorem

$$R_{p,\alpha,\beta}(x,y) = \frac{2}{n\Gamma(\beta+1)\Omega_n} D^{\beta+1}\left(t^{\frac{n+\alpha}{2}+\beta}P_p(tx,y)\right)\Big|_{t=1}.$$

Dowód. Biorąc $k = m + \frac{n+\alpha}{2} + \beta$ oraz $l = \beta$ we wzorze (4.11) dostajemy

$$D^{\beta+1}t^{m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta} = \frac{\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}t^{m+\frac{n+\alpha}{2}-1},$$

zatem

$$D^{\beta+1}\left(t^{\frac{n+\alpha}{2}+\beta}Z_m^p(tx,y)\right)\Big|_{t=1} = \frac{\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}Z_m^p(x,y).$$

Ponieważ

$$P_p(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m^p(x,y),$$

to z powyższych rozważań i z Twierdzenia 4.4 dostaniemy

$$\begin{aligned}
R_{p,\alpha,\beta}(x,y) &= \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}Z_m^p(x,y) \\
&= \frac{2}{n\Omega_n\Gamma(\beta+1)}\sum_{m=0}^{\infty} D^{\beta+1}\left(t^{\frac{n+\alpha}{2}+\beta}Z_m^p(tx,y)\right)\Big|_{t=1} \\
&= \frac{2}{n\Omega_n\Gamma(\beta+1)} D^{\beta+1}\left(t^{\frac{n+\alpha}{2}+\beta}\sum_{m=0}^{\infty} Z_m^p(tx,y)\right)\Bigg|_{t=1} \\
&= \frac{2}{n\Gamma(\beta+1)\Omega_n} D^{\beta+1}\left(t^{\frac{n+\alpha}{2}+\beta}P_p(tx,y)\right)\Big|_{t=1},
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 4.6. Ważone jądro poliharmoniczne Bergmana wyraża się wzorem

$$R_{p,\alpha,\beta}(x,y) = \sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{y}|^{2k} R_{1,\alpha+4k,\beta}(x,y),$$

w szczególności

$$R_p(x,y) = \sum_{k=0}^{p-1} |x|^{2k}|\overline{y}|^{2k} R_{1,4k,0}(x,y).$$

Dowód. Z Twierdzenia 4.4 jest

$$R_{p,\alpha,\beta}(x,y)=\frac{1}{n\Omega_n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}Z_m^p(x,y).$$

zatem z (4.3) dostaniemy

$$\begin{aligned}R_{p,\alpha,\beta}(x,y) &= \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha}{2})}|x|^{2k}|\overline{y}|^{2k}Z_{m-2k}(x,y)\\ &= \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\Gamma(m+2k+\frac{n+\alpha}{2}+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+2k+\frac{n+\alpha}{2})}|x|^{2k}|\overline{y}|^{2k}Z_{m}(x,y)\\ &= \frac{1}{n\Omega_n}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\Gamma(m+\frac{n+\alpha+4k}{2}+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(m+\frac{n+\alpha+4k}{2})}|x|^{2k}|\overline{y}|^{2k}Z_{m}(x,y).\end{aligned}$$

Korzystając z Twierdzenia 4.4 otrzymamy żądany wzór. □

Rozdział 5

Funkcje poliharmoniczne a funkcje holomorficzne

W tym rozdziale podamy związek funkcji poliharmonicznych z funkcjami holomorficznymi na kuli Liego. W tym celu przypomnimy pojęcie jądra Cauchy'ego-Hua i twierdzenie Hua. Pokażemy m.in. związek poliharmonicznego jądra Poissona dla $\widehat{B}_p$ z jądrem Cauchy'ego-Hua, podamy konstrukcję ciągu funkcji poliharmonicznych zbieżnych do funkcji holomorficznej na LB, ciągłej na $\overline{LB}$. Jako wniosek zanotujemy również własność wartości średniej dla funkcji holomorficznych na kuli Liego.

1 Wzór Cauchy'ego-Hua

Będziemy rozważać funkcje holomorficzne na kuli Liego i ciągłe na sferze Liego, o zbiorach tych wspomnieliśmy w rozdziale pierwszym. Przypomnijmy, kula Liego o promieniu r jest to zbiór postaci

$$LB(0,r) = \{z \in \mathbb{C}^n \colon L(z) < r\},$$

gdzie

$$L(z) = \left(||z||^2 + \sqrt{||z||^4 - |z^2|^2_{\mathbb{C}}}\right)^{1/2}$$

jest normą Liego, zaś sfera Liego o promieniu $r > 0$ to zbiór

$$LS(0,r) = \{e^{i\varphi}x \colon \varphi \in \mathbb{R},\ x \in S(0,r)\}.$$

Przyjmujemy przy tym oznaczenia $LB := LB(0,1)$ oraz $LS = LS(0,1)$. Przypomnijmy również, że kula Liego jest harmoniczną (a więc i poliharmoniczną) otoczką dla kuli euklidesowej B, czyli każda funkcja harmoniczna (poliharmoniczna) na B przedłuża się do funkcji harmonicznej (poliharmonicznej) na LB, zaś sfera Liego jest jego brzegiem Szyłowa, czyli najmniejszym zbiorem domkniętym zawartym w ∂LB, na którym zachodzi zasada maksimum.

Całkowanie po sferze Liego względem unormowanej miary niezmienniczej $d\tilde{\sigma}(\omega)$ na $LS(0,r)$ definiujemy następująco (por. [21], str. 63):

$$\int\limits_{LS(0,r)} F(w)\, d\tilde{\sigma}(w) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_S F(re^{i\varphi}\zeta)\, d\sigma(\zeta) d\varphi. \tag{5.1}$$

Uwaga 5.1. Zauważmy, że

$$\int\limits_{LS} F(w)\, d\tilde{\sigma}(w) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_S F(re^{i\varphi}\zeta)\, d\sigma(\zeta) d\varphi.$$

Istotnie, mamy bowiem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_S F(re^{i\varphi}\zeta)\, d\sigma(\zeta) d\varphi &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_S F(re^{i\varphi}\zeta)\, d\sigma(\zeta) d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\int\limits_S F(re^{i\varphi}\zeta)\, d\sigma(\zeta) d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_S F(re^{i\varphi}\zeta)\, d\sigma(\zeta) d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_S F(-re^{i\varphi}\zeta)\, d\sigma(\zeta) d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_S F(re^{i\varphi}\zeta)\, d\sigma(\zeta) d\varphi.
\end{aligned}$$

Lemat 5.1. ([21], Theorem 3.31) Niech $f \in \mathcal{O}(LB)$, wówczas istnieją wielomiany jednorodne $u_m \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n)$ takie, że

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(z). \tag{5.2}$$

Szereg powyższy zbiega jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze kuli Liego LB, przy czym wielomiany u_m nazywamy *m-jednorodnymi składowymi* funkcji holomorficznej f oraz wyrażają się one wzorem

$$u_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{f(tz)}{t^{m+1}} dt. \tag{5.3}$$

Rozważmy teraz funkcję holomorficzną $f \in LB$, ciągłą na $\overline{LB}$, wtedy, zgodnie z ostatnim lematem, f możemy przedstawić w postaci (5.2). Dokonując podstawienia $t = e^{i\varphi}$

pod znakiem całki we wzorze (5.3) dostaniemy

$$u_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}z)e^{-im\varphi}d\varphi.$$

Z drugiej strony na mocy Lematu 3.2 istnieją wielomiany harmoniczne $q_{m-2k} \in \mathcal{H}_{m-2k}(\mathbb{C}^n)$, $k = 0, 1, ..., [\frac{m}{2}]$ takie, że

$$u_m(z) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} |z|^{2k} q_{m-2k}(z),$$

przy czym $u_m(\zeta) = q_m(\zeta) + q_{m-2}(\zeta) + \cdots + q_{m-2[\frac{m}{2}]}(\zeta)$ dla $\zeta \in S$ oraz

$$q_{m-2k}(z) = \int_S Z_{m-2k}(z,\zeta) q_{m-2k}(\zeta) d\zeta.$$

Ponieważ harmoniki różnych stopni są ortogonalne, to

$$q_{m-2k}(z) = \int_S Z_{m-2k}(z,\zeta) u_m(\zeta) d\zeta.$$

Zatem dalej jest

$$\begin{aligned} q_{m-2k}(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_S Z_{m-2k}(z,\zeta)\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}\zeta)e^{-im\varphi}d\varphi d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_S e^{i(m-2k)\varphi}e^{-i(m-2k)\varphi} Z_{m-2k}(z,\zeta) f(e^{i\varphi}\zeta)e^{-im\varphi} d\zeta d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_S e^{-2ik\varphi} Z_{m-2k}(z, e^{i\varphi}\zeta) f(e^{i\varphi}\zeta) d\zeta d\varphi. \end{aligned}$$

Uwzględniając (5.1) dostajemy

$$q_{m-2k}(\zeta) = \int_{LS} |\overline{w}|^{2k} Z_{m-2k}(z,w) f(w) d\tilde{\sigma}(w).$$

Zbierając wszystkie powyższe wyniki i podstawiając je do (5.2) otrzymamy

$$f(z) = \int_{LS} H(z,w) f(w) d\tilde{\sigma}(w),$$

gdzie

$$H(z,w) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} |z|^{2k}|\overline{w}|^{2k} Z_{m-2k}(z,w).$$

Można pokazać (zob. [9] lub [21]), że

$$H(z,w) = \frac{1}{(z^2\overline{w}^2 - 2z\overline{w} + 1)^{n/2}}. \tag{5.4}$$

Prawdziwe jest zatem stwierdzenie

Stwierdzenie 5.1 (Wzór Cauchy'ego-Hua, [21, Theorem 5.7])**.** Niech $f \in \mathcal{O}(LB) \cap \mathcal{C}(LB \cup LS)$, wtedy

$$f(z) = \int_{LS} H(z,w) f(w)\, d\tilde{\sigma}(w) \qquad \text{dla} \quad z \in LB.$$

Definicja 5.1 ([21, Definition 5.5])**.** Funkcję $H(z,w)$ określoną wzorem (5.4) nazywamy *jądrem Cauchy'ego-Hua.*

Uwaga 5.2. Postępując podobnie można pokazać, że jeśli $f \in \mathcal{O}(LB(0,r)) \cap \mathcal{C}(\overline{LB(0,r)})$, to

$$f(z) = \int_{LS(0,r)} H_r(z,w) f(w)\, d\tilde{\sigma}(w) \qquad \text{dla} \quad z \in LB(0,r),$$

gdzie $H_r(z,w) = H(z/r, w/r)$.

Uwaga 5.3. Jądro Cauchy'ego - Hua $H(z,w)$ jest funkcją holomorficzną zmiennej z i antyholomorficzną zmiennej w na zbiorze

$$LD := \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \colon L(z)L(w) < 1\}$$

oraz $H(z,w) = \overline{H(w,z)}$ (por. Morimoto [21, Lemma 5.6]).

2 Związek jądra Poissona z jądrem Cauchy'ego-Hua

W poprzednim rozdziale znaleźliśmy uogólnione jądro Poissona P_p dla funkcji poliharmonicznych. W szczególności dla $p = 1$ jest to klasyczne jądro Poissona dla funkcji harmonicznych na kuli B. Teraz pokażemy, że zachodzi również związek z jądrem Cauchy'ego-Hua. Porównamy harmoniczne jądro Poissona określone wzorem (3.12), poliharmoniczne jądro Poissona dla $\widehat{B}_p$ dane wzorem (3.15) z jądrem Cauchy'ego-Hua (5.4).

Po pierwsze zauważmy, że funkcja $P_p(\cdot, \zeta)$ przedłuża się holomorficznie na kulę Liego jako funkcja poliharmoniczna (por. Stwierdzenie 3.9), oczywiście możemy wziąć $w \in LS$ zamiast $\zeta \in \widehat{S}_p$. Z równości (3.12), (3.15) oraz (5.4) dostajemy natychmiastową obserwację:

$$P(z,w) = (1 - |z|^2 |\overline{w}|^2) H(z,w), \tag{5.5}$$

$$P_p(z,w) = (1 - |z|^{2p} |\overline{w}|^{2p}) H(z,w) \tag{5.6}$$

Wynika stąd zatem, że funkcje $P(z,w)$ i $P_p(z,w)$ mają te same własności z Uwagi 5.3 co jądro Cauchy'ego-Hua. Ponadto prawdziwe jest stwierdzenie

Stwierdzenie 5.2. Jądro Poissona $P_p(z,w)$ zbiega do jądra Cauchy'ego-Hua $H(z,w)$ niemal jednostajnie na LD przy $p \to \infty$.

Dowód. Korzystając z (5.6) dostajemy oszacowania

$$(1 - \|z\|^{2p}\|w\|^{2p})|H(z,w)|_{\mathbb{C}} \leqslant |P_p(z,w)|_{\mathbb{C}} \leqslant (1 + \|z\|^{2p}\|w\|^{2p})|H(z,w)|_{\mathbb{C}}. \tag{5.7}$$

Ponieważ $\|z\| \leqslant L(z)$ dla dowolnego $z \in \mathbb{C}^n$, to dla dowolnego zwartego podzbioru E zbioru LD istnieje $\alpha_E < 1$ takie, że $\sup_{(z,w)\in E} \|z\| \cdot \|w\| = \alpha_E$. Zatem, na mocy (5.7), jest

$$\sup_{(z,w)\in E} |P_p(z,w) - H(z,w)|_{\mathbb{C}} \leqslant \alpha_E^{2p} \sup_{(z,w)\in E} |H(z,w)|_{\mathbb{C}}, \tag{5.8}$$

przy czym prawa strona nierówności (5.8) dąży do zera przy $p \to \infty$, co kończy dowód. □

Uwaga 5.4. Można poprawić oszacowanie (5.7) w szczególnym przypadku, gdy $(z,w) \in LD$ zastąpimy przez $(x,\zeta) \in \widehat{B}_p \times \widehat{S}_p$. Istotnie, zauważmy najpierw (por. rozdział pierwszy), że $\widehat{B}_p \times \widehat{S}_p \subset LD$, więc funkcja $H(x,\zeta)$ jest dobrze określona, a ponieważ $0 < 1 - |x|^{2p}|\overline{\zeta}|^{2p} < 1$, to możemy napisać

$$|P_p(x,\zeta)|_{\mathbb{C}} = (1 - |x|^{2p}|\overline{\zeta}|^{2p})|H(x,\zeta)|_{\mathbb{C}} \quad \text{dla dowolnego} \quad (x,\zeta) \in \widehat{B}_p \times \widehat{S}_p.$$

Zgodnie ze Stwierdzeniem 5.2 możemy oczekiwać, że wzór Cauchy'ego-Hua jest granicą rozwiązań Dirichleta dla funkcji poliharmonicznych rzędu p przy p dążącym do nieskończoności i istotnie tak jest, prawdziwe jest bowiem twierdzenie:

Twierdzenie 5.1. Niech $u \in \mathcal{O}(LB) \cap \mathcal{C}(\overline{LB})$, wówczas istnieje ciąg funkcji poliharmonicznych $(u_p)_{p=1}^{\infty}$, $u_p \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B}_p)$, wzrastającego rzędu p taki, że $u_p = u|_{\widehat{S}_p}$ oraz

$$\lim_{p\to\infty} u_p(z) = \int\limits_{LS} H(z,w)u(w)\, d\tilde{\sigma}(w) = u(z) \quad \text{dla} \quad z \in LB.$$

Dowód. Rozważmy funkcję u_p jako rozwiązanie następującego zagadnienia Dirichleta

$$\begin{cases} \Delta^p u_p(x) = 0, & x \in \widehat{B}_p, \\ u_p(x) = u(x), & x \in \widehat{S}_p. \end{cases}$$

Na mocy Twierdzenia 2.1 u_p jest jednoznacznie określone wzorem:

$$u_p(x) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \int\limits_S \frac{1 - |x|^{2p}}{\left|e^{\frac{-k\pi i}{p}}x - \zeta\right|^n} u(e^{\frac{k\pi i}{p}}\zeta) d\,\sigma(\zeta)$$

dla dowolnego $p \in \mathbb{N}$. Tworzymy ciąg $(u_p)_{p=1}^{\infty}$, gdzie u_p jest określona powyższym wzorem. Wtedy (u_p) jest ciągiem funkcji poliharmonicznych wzrastającego rzędu p takich, że $u_p = u|_{\widehat{S}_p}$.

Przechodząc do granicy z $p \to \infty$ i korzystając z definicji całki Riemanna oraz postaci jądra Cauchy'ego-Hua dostajemy dla $z \in LB$

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} u_p(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_S \frac{1}{|e^{-i\varphi}x-\zeta|^n} u(e^{i\varphi}\zeta)d\,\sigma(\zeta)d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_S \frac{u(e^{i\varphi}\zeta)}{(e^{-2i\varphi}x^2\zeta^2-2e^{-i\varphi}x\zeta+1)^{\frac{n}{2}}}\,d\sigma(\zeta)d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_S H(x,e^{i\varphi}\zeta)u(e^{i\varphi}\zeta)\,d\sigma(\zeta)d\varphi.
\end{aligned}$$

Z powyższych rozważań, z Uwagi 5.1 i ze Stwierdzenia 5.1 wnioskujemy, że

$$\lim_{p\to\infty} u_p(x) = \int_{LS} H(x,w)u(w)\,d\tilde{\sigma}(w) = u(x).$$

Z jednoznaczności analitycznego przedłużenia możemy zastąpić w ostatniej równości zmienną $x \in B$ przez $z \in LB$ po czym dostajemy tezę twierdzenia. □

Uwaga 5.5. Zauważmy, że Twierdzenie 5.1 dostarcza nam konstrukcję ciągu funkcji poliharmonicznych u_p na LB, ciągłych na LS, który przybliża daną funkcję holomorficzną u na LB.

Uwaga 5.6. Podobnie jak wyżej możemy wykazać, że dla każdej funkcji $u \in \mathcal{O}(LB(0,r)) \cap \mathcal{C}(\overline{LB(0,r)})$ istnieje ciąg funkcji poliharmonicznych $(u_p)_{p=1}^{\infty}$, $u_p \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B(0,r))$, wzrastającego rzędu p taki, że $u_p = u|_{\bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} S(0,r)}$ oraz

$$\lim_{p\to\infty} u_p(z) = \int_{LS(0,r)} H_r(z,w)u(w)\,d\tilde{\sigma}(w) = u(z) \quad \text{dla} \quad z \in LB.$$

Na koniec zanotujmy jeszcze jeden wniosek:

Wniosek 5.1 (Własność wartości średniej dla funkcji analitycznych)**.** Niech G będzie otwartym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}^n$. Jeśli $u \in \mathcal{A}(G)$, wówczas dla dowolnego $a \in G$ oraz wystarczająco małego $r > 0$ zachodzi wzór

$$u(a) = \int_{LS} u(a+rw)\,d\tilde{\sigma}(w).$$

Dowód. Zauważmy, że istnieje otwarte otoczenie zespolone $U \subset \mathbb{C}^n$ dla zbioru G takie, że u przedłuża się holomorficznie na U, tzn. $u \in \mathcal{O}(U)$ (por. rozdział 1). Dla wystarczająco małego $r > 0$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $a + LB(0, r + \varepsilon) \subset U$. Mamy więc $u \in \mathcal{O}(a + LB(0, r + \varepsilon))$, czyli $u \in \mathcal{O}(a + LB(0, r))$ oraz u jest ciągła na $(a + LB(0, r)) \cup (a + LS(0, r))$. Z poprzedniego twierdzenia i z ostatniej uwagi istnieje ciąg funkcji poliharmonicznych $u_p \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(B(a, r + \epsilon))$ wzrastającego rzędu p taki, że $u_p = u|_{a+\bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} S}$ oraz u_p przedłuża się w sposób ciągły na $a + LS(0, r)$ biorąc $u_p = u|_{a+LS(0,r)}$, a także

$$u(z) = \lim_{p\to\infty} u_p(z).$$

W szczególności

$$u(a) = \lim_{p\to\infty} u_p(a)$$

Z własności wartości średniej dla funkcji poliharmonicznych (por. Wniosek 2.2) jest

$$u_p(a) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S u_p(a + e^{\frac{k\pi i}{p}} r\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

zatem

$$u(a) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S u_p(a + e^{\frac{k\pi i}{p}} r\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

Tak jak w dowodzie Twierdzenia 5.1, korzystając z definicji całki Riemanna dostajemy

$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_S u(a + re^{i\varphi}\zeta)\, dS(\zeta) d\varphi \\ &= \int_{LS} u(a + rw)\, d\tilde{\sigma}(w), \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Uwaga 5.7. Powyższą własność wartości średniej, podobnie jak w przypadku własności wartości średniej dla funkcji poliharmonicznych (por. Uwaga 2.1), można również otrzymać korzystając z formuł Pizzettiego dla operatora Δ^p (por. [15, Corollary 1]).

Uwagi końcowe

Na zakończenie zanotujmy kilka uwag o możliwych dalszych badaniach funkcji poliharmonicznych na kulach obróconych. Przede wszystkim łatwo zauważyć, że niniejsza praca jest po części próbą przeniesienia własności funkcji harmonicznych na poliharmoniczne. Jak zobaczyliśmy wcześniej, rozważanie funkcji poliharmonicznych na obróconych kulach euklidesowych pozwoliło nam uogólnić wiele twierdzeń znanych z teorii funkcji harmonicznych. Twierdzenia te wskazują na duże podobieństwo między wspomnianymi klasami funkcji. Wymieńmy niektóre z nich:

a) własność wartości średniej,

b) postać rozwiązania zagadnienia Dirichleta,

c) analogiczne własności poliharmonik i harmonik sferycznych,

d) twierdzenie o rozkładzie ortogonalnym,

e) postać i własności jądra Poissona, a także jądra Bergmana.

Powstaje naturalne pytanie o to, czy można uzyskać więcej takich analogii. Odpowiedź wydaje się być twierdząca. Poniżej przedstawimy kilka pytań, problemów, które w naturalny sposób pojawiają się przy wcześniejszych rozważaniach zawartych w tej pracy.

Na początek przypomnijmy (por. Twierdzenie 2.2), że jeśli $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B}_p) \cap \mathcal{C}(\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p)$, to

$$u\,(x) = \frac{1}{p\omega_n} \sum_{k=0}^{p-1} \int_S \frac{1 - |x|^{2p}}{|e^{\frac{-k\pi i}{p}} x - \zeta|^n} u(e^{\frac{k\pi i}{p}} \zeta)\, dS(\zeta).$$

Pojawia się tu pytanie, czy implikacja w drugą stronę jest prawdziwa, dokładniej, czy funkcja określona powyższym wzorem jest ciągła na $\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p$, gdy tylko $u \in \mathcal{C}(\widehat{S}_p)$. Innymi słowy, czy zagadnienie Dirichleta

$$\begin{cases} \Delta^p u(x) = 0, & x \in \widehat{B}_p, \\ u(x) = f(x), & x \in \widehat{S}_p, \end{cases}$$

gdzie $f \in \mathcal{C}(\widehat{S}_p)$, posiada zawsze rozwiązanie. Wiadomo, że odpowiedź jest twierdząca, gdy f jest wielomianem (por. Wniosek 3.4).

Przejdźmy teraz do innego problemu. Przypomnijmy, że dla funkcji harmonicznych zachodzi tzw. zasada maksimum:

Twierdzenie. Jeśli $u \in \mathcal{A}_\Delta(B) \cup \mathcal{C}(\overline{B})$, to

$$|u(x)|_{\mathbb{C}} \leqslant \max_{y \in S} |u(y)|_{\mathbb{C}} \quad \text{dla każdego } x \in B.$$

Możemy postawić hipotezę:
Jeśli $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(\widehat{B}_p) \cup \mathcal{C}(\widehat{B}_p \cup \widehat{S}_p)$, to

$$|u(x)|_{\mathbb{C}} \leqslant \max_{y \in \widehat{S}_p} |u(y)|_{\mathbb{C}} \quad \text{dla każdego } x \in \widehat{B}_p.$$

Łatwo zauważyć, że z własności wartości średniej dla funkcji poliharmonicznych (por. Wniosek 2.2) hipoteza powyższa zachodzi dla $x = 0$. Należy nadmienić ponadto, że prawdziwa jest następująca wersja zasady maksimum dla funkcji poliharmonicznych (por. także [15, Theorem 3]):

Twierdzenie ([15, Corollary 3])**.** Niech $G \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem spójnym i otwartym, $u \in \mathcal{A}_{\Delta^p}(G)$ będzie funkcją rzeczywistą, zaś $\tilde{u}$ niech oznacza jej holomorficzne przedłużenie na zespolone otoczenie U zbioru G. Jeśli istnieje $x_0 \in G$ oraz $r > 0$ takie, że

$$|u(x_0)| \geqslant |\tilde{u}(x)|_{\mathbb{C}} \quad \text{dla każdego } x \in \widehat{B}_p(x_0, r),$$

to u jest funkcją stałą na G.

Oczywiście to tylko niektóre zagadnienia jakimi można się dalej zajmować. Jest jeszcze chociażby badanie kolejnych własności poliharmonik sferycznych, badanie związku poliharmonicznego jądra Bergmana z jego odpowiednikiem dla funkcji holomorficznych na kuli Liego – przypomnijmy, że taki związek istnieje między poliharmonicznym jądrem Poissona a jądrem Cauchy'ego-Hua (por. Stwierdzenie 5.2 oraz Twierdzenie 5.1). Reasumując, dalsze badania nad funkcjami poliharmonicznymi na obróconych kulach wydają się być zasadne.

Bibliografia

[1] N. Aronszajn, T.M. Creese, L.J. Lipkin, *Polyharmonic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1983.

[2] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, second edition, Springer-Verlag, New York, 2001.

[3] H. Begehr, J. Du, Y. Wang, *A Dirichlet problem for polyharmonic functions*, Ann. Mat. Pura Appl. 187 (2008), 435 – 457.

[4] K. Chełmiński, W. Ożański, *Równania różniczkowe cząstkowe*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2015.

[5] Z. Du, T. Qian, J. Wang, *L^p polyharmonic Dirichlet problems in regular domains III: the unit ball*, Complex Var. Elliptic Equ. 59 (2014), 947 – 965.

[6] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach space theory*, in: CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer-Verlag, New York, 2011.

[7] J. Faraut, A. Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[8] K. Fujita, M. Morimoto, *Between Lie Norm and Dual Lie Norm*, Tokyo J. Math. 24, no. 2 (2001), 499 – 507.

[9] K. Fujita, M. Morimoto, *Holomorphic functions on the Lie ball and related topics*, in: Finite or infinite dimensional complex analysis and applications, 35 – 44, Kluwer Acad. Publ., Boston, 2004.

[10] F. Gazzola, H. Ch. Grunau, G. Sweers, *Polyharmonic Boundary Value Problems*, Springer-Verlag, New York, 2010.

[11] H. Grzebuła, S. Michalik, *A Dirichlet type problem for complex polyharmonic functions*, Acta Math. Hungar. 153 (2017), 435 – 457.

[12] H. Grzebuła, S. Michalik, *Spherical polyharmonics and Poisson kernels for polyharmonic functions*, Complex Var. Elliptic Equ. 64 (2019), 420 – 442.

[13] H. Grzebuła, *The polyharmonic Bergman space for the union of rotated unit balls*, Complex Anal. Oper. Theory 14:15 (2020).

[14] L. K. Hua, *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex in Classical Domains*, Translation of Mathematical Monographs 6, AMS, Providence, Rhode Island, 1963.

[15] G. Łysik, *Higher order Pizzetti's formulas*, Rend. Lincei Mat. Appl. 27 (2016), 105 – 115.

[16] G. Łysik, *On the mean-value property for polyharmonic functions*, Acta Math. Hungar., 133 (2011), 133 – 139.

[17] G. Łysik, *Mean-value properties of real analytic functions*, Arch. Math. (Basel), 98 (2012), 61 – 70.

[18] S. Michalik, *Summable solutions of some partial differential equations and generalised integral means*, J. Math. Anal. Appl. 444 (2016), 1242 – 1259.

[19] L. M. Milne-Thomson, *The Calculus of Finite Differences*, Macmillan and Co., London (1933).

[20] M. Morimoto, *Analytic functionals on the Lie sphere*, Tokyo J. Math., 3 (1980), 1 – 35.

[21] M. Morimoto, *Analytic Functionals on the Sphere*, Translation of Mathematical Monographs 178, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.

[22] M. Pavlovic, *Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl. 216 (1997), 499 – 509.

[23] L. V. Pessoa, *On the structure of polyharmonic Bergman type spaces over the unit disc*, Complex Var. Elliptic Equ. 60 (2015), 1668 – 1684.

[24] A. I. Petrosyan, *On weighted harmonic Bergman spaces*, Demonstratio Mathematica 41 (2008), 73 – 83.

[25] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGraw-Hill, New York, 1976.

[26] J. Siciak, *Holomorphic continuation of harmonic functions*, Ann. Polon. Math. 29 (1974), 67 – 73.

[27] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publications 23, AMS, Providence, Rhode Island, 2003.

[28] K. Tanaka, *Biharmonic Bergman space and its reproducing kernel*, Complex Var. Elliptic Equ. 63 (2018), 1642 – 1663.

[29] K. Tanaka, *Estimates for the Polyharmonic Bergman Kernel and Their Applications*, Complex Anal. Oper. Theory 13 (2019), 2707 – 2727.

Oznaczenia

$\lvert x\rvert$	-	norma rzeczywista z x, str. 17
$\lvert\lvert z\rvert\rvert$	-	norma zespolona z z, str. 18
$L(z)$	-	norma Liego, str. 20
$B(a,r)$	-	kula o środku a i promieniu r, str. 17
$S(a,r)$	-	sfera o środku a i promieniu r, str. 17
B	-	kula jednostkowa, str. 18
S	-	sfera jednostkowa, str. 18
Ω_n	-	objętość kuli jednostkowej B, str. 18
ω_n	-	pole powierzchni sfery jednostkowej S, str. 18
$\widehat{B}_p = \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} B$	-	suma kul obróconych, str. 18
$\widehat{S}_p = \bigcup_{k=0}^{p-1} e^{\frac{k\pi i}{p}} S$	-	suma sfer obróconych, str. 19
$LB(0,r)$	-	kula Liego o promieniu r, str. 20
$LS(0,r)$	-	sfera Liego o promieniu r, str. 20
LB	-	jednostkowa kula Liego, str. 20
LS	-	jednostkowa sfera Liego, str. 20
$dS(\zeta)$	-	miara powierzchniowa na S, str. 22
$d\sigma(\zeta)$	-	unormowana miara powierzchniowa na S, str. 47
$d\tilde{\sigma}(\zeta)$	-	unormowana miara niezmiennicza na LS, str. 84
Δ	-	operator Laplace'a, str. 19
Δ^p	-	p-krotnie iterowany operator Laplace'a, str. 19

$\mathcal{C}(G)$	-	przestrzeń funkcji ciągłych na G, str. 20
$\mathcal{C}^k(G)$	-	przestrzeń funkcji k-krotnie różniczkowalnych na G, str. 20
$\mathcal{A}(G)$	-	przestrzeń funkcji analitycznych na G, str. 19
$\mathcal{A}_\Delta(G)$	-	przestrzeń funkcji analitycznych harmonicznych na G, str. 19
$\mathcal{A}_{\Delta^p}(G)$	-	przestrzeń funkcji analitycznych poliharmonicznych rzędu p na G, str. 19
$\mathcal{O}(U)$	-	przestrzeń funkcji holomorficznych na U, str. 19
$\mathcal{O}_\Delta(U)$	-	przestrzeń funkcji holomorficznych harmonicznych na U, str. 19
$\mathcal{O}_{\Delta^p}(U)$	-	przestrzeń funkcji holomorficznych poliharmonicznych rzędu p na U, str. 19
$K[u]$	-	uogólniona transformacja Kelvina z funkcji u, str. 37
$\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n)$	-	przestrzeń wielomianów jednorodnych stopnia m na $\mathbb{C}^n$, str. 42
$\mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n)$	-	przestrzeń wielomianów harmonicznych, jednorodnych stopnia m na $\mathbb{C}^n$, str. 42
$\mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n)$	-	przestrzeń wielomianów poliharmonicznych rzędu p, jednorodnych stopnia m na $\mathbb{C}^n$, str. 42
$\mathcal{H}_m(S)$	-	przestrzeń harmonik strefowych stopnia m, str. 45
$\mathcal{H}_m^p(\widehat{S}_p)$	-	przestrzeń poliharmonik strefowych rzędu p stopnia m, str. 45
$b_p^2(\widehat{B}_p)$	-	przestrzeń poliharmoniczna Bergmana, str. 68
$b_{p,\alpha,\beta}^2(\widehat{B}_p)$	-	ważona przestrzeń poliharmoniczna Bergmana z wagami α, β, str. 76
$Z_m(x,\zeta)$	-	harmonika strefowa stopnia m, str. 50
$Z_m^p(x,\zeta)$	-	poliharmonika strefowa rzędu p stopnia m, str. 50
$h_{m,n} = \dim \mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n)$	-	wymiar przestrzeni $\mathcal{H}_m(\mathbb{C}^n)$, str. 42
$h_{m,n}^p = \dim \mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n)$	-	wymiar przestrzeni $\mathcal{H}_m^p(\mathbb{C}^n)$, str. 44
$\oplus$	-	suma prosta, str. 42
$L^2(S)$	-	przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem na S, str. 47
$L^2(\widehat{S}_p)$	-	przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem na $\widehat{S}_p$, str. 47
$\langle f,g\rangle_S$	-	iloczyn skalarny na $L^2(S)$, str. 47
$\langle f,g\rangle_{\widehat{S}_p}$	-	iloczyn skalarny na $L^2(\widehat{S}_p)$, str. 47
$P(x,\zeta)$	-	harmoniczne jądro Poissona dla B, str. 55

$P_p(x,\zeta)$	-	poliharmoniczne jądro Poissona rzędu p dla $\widehat{B}_p$, str. 55
$H(x,\zeta)$	-	jądro Cauchy'ego-Hua, str. 86
$R_p(x,y)$	-	poliharmoniczne jądro Bergmana rzędu p dla $\widehat{B}_p$, str. 69
$R_{p,\alpha,\beta}(x,y)$	-	poliharmoniczne jądro ważone Bergmana rzędu p, str. 77
$P[f]$	-	p-ta całka Poissona dla funkcji ciągłej f na S, str. 55
$P_p[f]$	-	p-ta całka Poissona dla funkcji ciągłej f na $\widehat{S}_p$, str. 55

Skorowidz