

Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. 4 II 2011. Grupa A

Imię i Nazwisko:

Numer indeksu:

Przygody Hani i Mikołaja

Przygoda 1. (10 punktów) Hania i Mikołaj postanowili zacząć hodować białe myszki. W tym celu udali się do sklepu zoologicznego, gdzie zakupili parę gryzoni. W sklepie dowiedzieli się, że każda samiczka rodzi: 0 córek z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ i k córek z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}(\frac{3}{4})^k$ (dla $k = 1, 2, \dots$). Znajdź:

- prawdopodobieństwo, że hodowla się kiedyś zakończy ze względu na brak samiczek,
- średnią liczbę samiczek w n -tym pokoleniu,
- prawdopodobieństwo, że hodowla się zakończy w trzecim pokoleniu.

Przygoda 2. (10 punktów) Pewnego długiego zimowego wieczoru Hania i Mikołaj postanowili wymyśleć swoją własną grę planszową. Dzieci narysowały na kartce 8 pól po których będzie się można kolejno poruszać: startując z pola $\boxed{1}$, później kolejno przechodząc na $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ i z powrotem na $\boxed{1}$ i dalej w kółko. Ponieważ dzieci nie mogły znaleźć kostki do gry, to poruszały się za pomocą rzutu monetą: jeśli wypadał orzeł to przechodziły 2 pola do przodu, a jak reszka to 1. Po pewnym czasie gra się dzieciom znudziła, więc postanowiły ją trochę uatrakcyjnić zamieniając część pól na pola specjalne:

$\boxed{2}$ — Znalazłeś siedmiomilowe buty. W następnym ruchu poruszasz się 2 razy dalej niż wskazuje na to rzucona moneta.

$\boxed{4}$ — Znalazłeś tunel. W następnym ruchu przez niego przechodzisz i znajdujesz się 4 pola dalej.

$\boxed{6}$ — Spotkany zając nauczył cię skakać. W następnym ruchu przeskakujesz o 2 pola do przodu

$\boxed{8}$ — Przed tobą rzeka. Żeby ją przekroczyć musisz wyrzucić orła. Skaczesz wtedy 2 pola do przodu.

Wykonaj następujące zadania:

- w przypadku zmodyfikowanej wersji oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że w N -tym okrążeniu znajdziemy się na polu startowym ($\boxed{1}$)?
- W przypadku obydwu wersji gry odpowiedz na następujące pytania (dla $i = 1, \dots, 8$): Jakie jest prawdopodobieństwo (po odpowiednio długim trwaniu gry), że dzieci będą stały na i -tym polu? Jaki jest średni czas powrotu na i -te pole?

Wskazówki: Znaleźć rozkłady stacjonarne dla odpowiednich łańcuchów Markowa

Przygoda 3. (15 punktów) Hania i Mikołaj czekali na przystanku na autobus, którym dojadą do babci. Na przystanku zatrzymywały się autobusy linii A (średnio co 20 minut), B (średnio co 12 minut) i C (średnio co pół godziny). Do babci jeździły autobusy linii A i C. Mikołaj uparł się, że będzie liczył autobusy jadące do babci i nie ruszy się z przystanku dopóki nie doliczy do 5. Odpowiedz na następujące pytania:

- Ile czasu średnio spędzili dzieci na przystanku zanim Mikołaj doliczył do 5?
- Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 20 minutach Mikołaj doliczył dokładnie do 2?
- Jak zmieniają się odpowiedzi na powyższe pytania, jeśli po przejechaniu 2 dobrych autobusów Hani uda się przekonać Mikołaja, by dalej liczył już wszystkie autobusy, a nie tylko pasujące?

Wskazówki: Zakładamy, że autobusy każdej linii poruszają się zgodnie z rozkładem Poissona. W podpunkcie c) znaleźć funkcję $p_2(t)$ korzystając z równań w przód.