Egzamin z procesów stochastycznych. Zadania. 4 II 2011. Grupa B

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Przygody Hani i Mikołaja

Przygoda 1. (10 punktów) Hania i Mikołaj postanowili zacząć hodować białe myszki. W tym celu udali się do sklepu zoologicznego, gdzie zakupili parkę gryzoni. W sklepie dowiedzieli się, że każda samiczka rodzi: 0 córek z prawdopodobieństwem $\frac{2}{5}$ i k córek z prawdopodobieństwem $\frac{3}{20}(\frac{4}{5})^k$ (dla $k = 1, 2, ...$). Znajdź:
a) prawdopodobieństwo, że hodowla się kiedyś zakończy ze względu na brak samiczek,
b) średnią liczbę samiczek w n-tym pokoleniu,
c) prawdopodobieństwo, że hodowla się zakończy w drugim pokoleniu.

Przygoda 2. (10 punktów) Pewnego długiego zimowego wieczoru Hania i Mikołaj postanowili wymyśleć swoją własną grę planszową. Dzieci narysowały na kartce 8 pól po których będzie się można kolejno poruszać: startując z pola $\boxed{1}$, pózniej kolejno przechodząc na $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ i z powrotem na $\boxed{1}$ i dalej w kółko. Ponieważ dzieci nie mogły znaleźć kostki do gry, to poruszały się za pomocą rzutu monetą: jeśli wypadał orzeł to przechodziły 2 pola do przodu, a jak reszka to 1. Po pewnym czasie gra się dzieciom znudziła, więc postanowiły ją trochę uatrakcyjnić zamieniając część pól na pola specjalne:
$\boxed{1}$ — Spotkany zając nauczył cię skakać. W następnym ruchu przeskakujesz o 2 pola do przodu
$\boxed{3}$ — Znalazłeś siedmiomilowe buty. W następnym ruchu poruszasz się 2 razy dalej niż wskazuje na to rzucona moneta.
$\boxed{5}$ — Znalazłeś tunel. W następnym ruchu przez niego przechodzisz i znajdujesz sie 4 pola dalej.
$\boxed{7}$ — Przed tobą rzeka. Żeby ją przekroczyć musisz wyrzucić orła. Skaczesz wtedy 2 pola do przodu.
Wykonaj następujące zadania:
a) w przypadku zmodyfinowanej wersji oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że w N-tym okrążeniu znajdziemy się na polu $\boxed{2}$, jeśli z niego startujemy? b) W przypadku obydwu wersji gry odpowiedz na następujące pytania (dla $i = 1, ..., 8$): Jakie jest prawdopodobieństwo (po odpowiednio długim trwaniu gry), że dzieci będą stały na i-tym polu? Jaki jest średni czas powrotu na i-te pole?

Wskazówki: Znaleźć rozkłady stacjonarne dla odpowiednich łańcuchów Markowa

Przygoda 3. (15 punktów) Hania i Mikołaj czekali na przystanku na autobus, którym dojadą do babci. Na przystanku zatrzymywały się autobusy linii A (średnio co 10 minut), B (średnio co 6 minut) i C (średnio co 15 minut). Do babci jeździły autobusy linii A i C. Mikołaj uparł się, że będzie liczył autobusy jadące do babci i nie ruszy się z przystanku dopóki nie doliczy do 4. Odpowedz na następujące pytania:
a) Ile czasu średnio spędziły dzieci na przystanku zanim Mikołaj doliczył do 4?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 10 minutach Mikołaj doliczył dokładnie do 2?
c) Jak zmienią się odpowiedzi na powyższe pytania, jeśli po przejechaniu 2 dobrych autobusów Hani uda się przekonać Mikołaja, by dalej liczył już wszystkie autobusy, a nie tylko pasujące?

Wskazówki: Zakładamy, że autobusy każdej linii poruszają się zgodnie z rozkładem Poissona. W podpunkcie c) znaleźć funkcję $p_2(t)$ korzystając z równań w przód.