Procesy stochastyczne. Kolokwium numer II
28 stycznia 2011 r. Grupa A

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i bedą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech Z_n będzie ostatnią cyfrą liczby $X_1 \cdot ... \cdot X_n$. Wykaż, że ciąg $\{Z_n : n \geqslant 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (10 punktów) Niech $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha Markowa o macierzy przejścia P. Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów bedących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (10 punktów) Rozważmy łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{0, 1, 2, ...\}$ i macierzy przejścia postaci $p_{0n} = p_n$, $p_{1n} = q_n$ i $p_{n+1,n} = 1$ dla $n = 1, 2, 3, ...$ Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha w zależności od warunków spełnianych przez ciągi $\{p_n\}$ i $\{q_n\}$. Znajdź rozkład stacjonarny, jeśli on istnieje.

Zadanie 4. (10 punktów) Wieża i hetman poruszają się niezależnie po szachownicy startując z tego samego rogu. Jaka jest średnia liczba kroków do czasu ponownego spotkania w tym rogu, jeśli wiemy, że hetman porusza się tylko po jednej ćwiartce szachownicy.

Zadanie 5 (10 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i macierzy przejścia P. Oblicz P^n, a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź rozkład stacjonarny (jeśli istnieje) i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Procesy stochastyczne. Kolokwium numer II
28 stycznia 2011 r. Grupa B

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. (10 punktów) Niech Y_i bedą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech T_n będzie ostatnią cyfrą liczby $2 \cdot Y_1 \cdot ... \cdot Y_n$. Wykaż, że ciąg $\{T_n : n \geqslant 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (10 punktów) Niech $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha Markowa o macierzy przejścia P. Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów bedących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (10 punktów) Rozważmy łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{0, 1, 2, ...\}$ i macierzy przejścia postaci $p_{0n} = q_n$, $p_{1n} = p_n$ i $p_{n+1,n} = 1$ dla $n = 1, 2, 3, ...$ Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha w zależności od warunków spełnianych przez ciągi $\{p_n\}$ i $\{q_n\}$. Znajdź rozkład stacjonarny, jeśli on istnieje.

Zadanie 4. (10 punktów) Konik i goniec poruszają się niezależnie po szachownicy startując z tego samego rogu. Jaka jest średnia liczba kroków do czasu ponownego spotkania w tym rogu, jeśli wiemy, że goniec porusza się tylko po jednej ćwiartce szachownicy.

Zadanie 5 (10 punktów) Niech X łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i macierzy przejścia P. Oblicz P^n, a następnie korzystając z twierdzenia ergodycznego znajdź rozkład stacjonarny (jeśli istnieje) i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$