Egzamin z procesów stochastycznych — szkic rozwiązań na podstawie grupy A

Przygoda 1. Korzystając z sumy szeregu geometrycznego znajdujemy funkcję tworzącą

$$G(s) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6}(\frac{3}{4})^k = \frac{2-s}{4-3s}.$$

Znajdujemy najmniejszy nieujemny pierwiastek równania $G(s) = s$ (uwaga: jednym z pierwiastków musi być $s = 1$, jeśli nie jest, to gdzieś musiał być zrobiony błąd!). W naszym przypadku będzie to $s = \frac{2}{3}$ i to jest prawdopodobieństwo, że hodowla się kiedyś zakończy ze względu na brak samiczek.

Średnią liczbę samiczek w 1-ym pokoleniu, to $\mu_1 = G'(1) = 2$. Zatem średnią liczbę samiczek w n-tym pokoleniu, to $\mu_n = \mu_1^n = (G'(1))^n = 2^n$.

Prawdopodobieństwo, że hodowla się zakończy w trzecim pokoleniu, to

$$P(T = 3) = P(Z_3 = 0) - P(Z_2 = 0) = G(G(G(0))) - G(G(0)) = G(G(\frac{1}{2})) - (G(\frac{1}{2}) = G(\frac{3}{5}) - \frac{3}{5} = \frac{7}{11} - \frac{3}{5} = \frac{2}{55}.$$

Przygoda 2. Rozpatrujemy łańcuch Markowa, którego stanami są pola $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, a macierz przejścia jest zadana przez zasady gry. Zauważmy, że w pierwotnej grze dla wszystkich stanów reguły poruszania są takie same. Stąd wszystkie stany są powracające niezerowe i przy rozkładzie stacjonarnym prawdopodobieństwa muszą byc takie same, czyli $\pi_1 = \pi_2 = ... = \pi_8 = \frac{1}{8}$. Łatwo widzieć, że jest to rozkład stacjonarny. Zatem wtedy średni czas powrotu to $\mu_1 = ... = \mu_8 = 8$.

W przypadku gry zmodyfikowanej zauważmy, że jak już wejdziemy na pole specjalne (tzn. parzyste), to już jego nieopuścimy. Zatem $\{2, 4, 6, 8\}$ jest zbiorem zamkniętym i łańcuchem nieprzywiedlnym, w którym wszystkie stany są ergodyczne. Zatem wystarczy rozpatrywać łanćuch złożony tylko z tycz czterech stanów. Wtedy rozwiazując układ 4 równań liniowych znajdujemy: $\pi_2 = \frac{1}{4}$, $\pi_4 = \pi_6 = \frac{1}{8}$ oraz $\pi_8 = \frac{1}{2}$. Stąd dostajemy średnie czasy powrotu dla tych stanów: $\mu_2 = 4$, $\mu_4 = \mu_6 = 8$, $\mu_8 = 2$. Wszystkie stany nieparzyste są chwilowe, więc $\pi_1 = \pi_3 = \pi_5 = \pi_7 = 0$ oraz $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \mu_7 = \infty$.

Aby w drugim okrążeniu znaleźć się na polu numer 1 musimy poruszać w pierwszym okrążeniu tylko po polach nieparzystych, tzn. wyrzucić 4 razy orła. Zatem to prawdopodobieństwo jest równe $(\frac{1}{2})^4$. Zatem aby w N-tym okrążeniu znaleźć się na polu numer 1 musimy wyrzucić orła $4(N-1)$, więc prawdopodobieństwo wynosi $(\frac{1}{2})^{4(N-1)}$.

Przygoda 3. Przyjazdy autobusów A, B i C opisują procesy Poissona N^A, N^B i N^C z intensywnościami $\lambda_A = 1/20$, $\lambda_B = 1/12$, $\lambda_C = 1/30$ (autobusy na minutę) lub łatwiej $\lambda_A = 3$, $\lambda_B = 5$, $\lambda_C = 2$ (autobusy na godzinę).

Niech N_1 - proces Piossona opisujący autobusy jadące do babci. Jego intensywność to $\lambda = \lambda_A + \lambda_C = 1/12$. Średni czas pomiędzy przyjazdami dobrych autobusów to $1/\lambda = 12$ minut. Zatem 5 autobusów przyjedzie średnio po $5 \cdot 12 = 60$ minutach. Z rozkładu Poissona znajdujemy prawdopodobieństwo $P(N_1(20) = 2) = \frac{(20/12)^2}{2!} e^{-20/12}$.

W przypadku c) zamiast procesu Poissona mamy proces narodzin N_2 z intensywnościami $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..,$ gdzie $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_A + \lambda_C = 1/12$ i $\lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1/6$. Teraz Mikołaj doliczy do 5 średnio po $2 \cdot 12 + 3 \cdot 6 = 42$ minutach.

Aby wyliczyc $P(N_2(20) = 2)$ musimy korzystając z równań w przód dla procesu narodzin wyliczyć $p_{02}(t) = P(N_2(t) = 2)$. Mamy

$$p'_{02}(t) = \lambda_1 p_{01}(t) - \lambda_2 p_{02}(t),$$

gdzie $\lambda_1 = 1/12$, $\lambda_2 = 1/6$ i $p_{01}(t) = \frac{1}{12} t e^{-t/12}$ (bo do tego momentu to jest proces Poissona z intensywnością 1/12) z warunkiem początkowym $p_{02}(0) = 0$. Rozwiązując to równanie liniowe niejednorodne znajdujemy $p_{02}(t)$ i podstawiając $t = 20$ dostajemy szukane prawdopodobieństwo.