

## Procesy stochastyczne. Kolokwium numer 1.

19 listopada 2013 r.

**Zadanie 1.** (10 punktów) Znajdź rozwiązanie równania różnicowego

$$a_{k+2} - 5a_{k+1} + 4a_k = -6k - 3, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 5.$$

**Zadanie 2.** (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błędzeniu losowym z  $S_0 = 0$  do  $S_{20} = 0$  spełniających jednocześnie obydwa poniższe warunki:

1.  $S_k \leq -2$  dla  $2 \leq k \leq 8$ ,
2.  $S_k > 0$  dla  $10 < k < 20$ .

**Zadanie 3.** (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym  $k = 3$  zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania  $N = 5$  zł. W każdej grze wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem  $p = \frac{1}{3}$ , przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem  $q = \frac{1}{3}$  lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem  $r = \frac{1}{3}$ .

- a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz uzbiera 5 zł,
- b) Oblicz średni czas trwania gry.

**Zadanie 4.** (15 punktów) Niech  $\{Z_n : n \geq 0\}$  będzie procesem gałęzkowym takim, że  $Z_0 = 1$ , a  $Z_1$  ma rozkład:  $P(Z_1 = 0) = \frac{1}{4}$  i  $P(Z_1 = 1) = \frac{3}{4}$ .

- a) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
- b) Wyprowadź wzór na funkcję tworzącą  $G_n(s)$  procesu gałęzkowego  $Z_n$ .
- c) Oblicz  $P(T = n)$ , gdzie  $T$  — moment wyginięcia populacji ( $T = \min\{n \geq 0 : Z_n = 0\}$ ).

## Procesy stochastyczne. Kolokwium numer 1.

19 listopada 2013 r.

**Zadanie 1.** (10 punktów) Znajdź rozwiązanie równania różnicowego

$$a_{k+2} - 5a_{k+1} + 4a_k = -6k - 3, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 5.$$

**Zadanie 2.** (10 punktów) Znajdź liczbę dróg w błędzeniu losowym z  $S_0 = 0$  do  $S_{20} = 0$  spełniających jednocześnie obydwa poniższe warunki:

1.  $S_k \leq -2$  dla  $2 \leq k \leq 8$ ,
2.  $S_k > 0$  dla  $10 < k < 20$ .

**Zadanie 3.** (15 punktów) Gracz z kapitałem początkowym  $k = 3$  zł gra do momentu bankructwa lub do chwili uzbierania  $N = 5$  zł. W każdej grze wygrywa 1 zł z prawdopodobieństwem  $p = \frac{1}{3}$ , przegrywa 1 zł z prawdopodobieństwem  $q = \frac{1}{3}$  lub gra kończy się remisem z prawdopodobieństwem  $r = \frac{1}{3}$ .

- a) Oblicz prawdopodobieństwo, że gracz uzbiera 5 zł,
- b) Oblicz średni czas trwania gry.

**Zadanie 4.** (15 punktów) Niech  $\{Z_n : n \geq 0\}$  będzie procesem gałęzkowym takim, że  $Z_0 = 1$ , a  $Z_1$  ma rozkład:  $P(Z_1 = 0) = \frac{1}{4}$  i  $P(Z_1 = 1) = \frac{3}{4}$ .

- a) Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia populacji.
- b) Wyprowadź wzór na funkcję tworzącą  $G_n(s)$  procesu gałęzkowego  $Z_n$ .
- c) Oblicz  $P(T = n)$ , gdzie  $T$  — moment wyginięcia populacji ( $T = \min\{n \geq 0 : Z_n = 0\}$ ).