

Procesy stochastyczne. Kolokwium numer 2. 28 stycznia 2014 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i będą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech Y_n będzie ostatnią cyfrą liczby $4 \cdot X_1 \cdot \dots \cdot X_n$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n: n \geq 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (10 punktów) Niech $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha Markowa o macierzy przejścia P . Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (10 punktów) Wieża i goniec poruszają się niezależnie po szachownicy startując z tego samego rogu. Jaka jest średnia liczba kroków do czasu ponownego spotkania w tym rogu, jeśli wiemy, że goniec porusza się tylko po jednej ćwiartce szachownicy.

Zadanie 4. (20 punktów) Niech $\{X_t: t \geq 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Wyznaczyć półgrupę $\{P_t: t \geq 0\}$.
- Znaleźć rozkład stacjonarny.
- Znaleźć łańcuch skoków procesu X .

Procesy stochastyczne. Kolokwium numer 2. 28 stycznia 2014 r.

Zadanie 1. (10 punktów) Niech X_i będą wynikami kolejnych rzutów kostką i niech Y_n będzie ostatnią cyfrą liczby $4 \cdot X_1 \cdot \dots \cdot X_n$. Wykaż, że ciąg $\{Y_n: n \geq 1\}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Znajdź przestrzeń stanów i macierz przejścia.

Zadanie 2. (10 punktów) Niech $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Przeprowadź klasyfikację stanów łańcucha Markowa o macierzy przejścia P . Znajdź zamknięte zbiory stanów. Dla zamkniętych zbiorów będących łańcuchami nieprzywiedlnymi znajdź rozkład stacjonarny i średnie czasy powrotu, jeśli

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (10 punktów) Wieża i goniec poruszają się niezależnie po szachownicy startując z tego samego rogu. Jaka jest średnia liczba kroków do czasu ponownego spotkania w tym rogu, jeśli wiemy, że goniec porusza się tylko po jednej ćwiartce szachownicy.

Zadanie 4. (20 punktów) Niech $\{X_t: t \geq 0\}$ będzie procesem Markowa na przestrzeni stanów $S = \{1, 2, 3\}$ z generatorem postaci

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Wyznaczyć półgrupę $\{P_t: t \geq 0\}$.
- Znaleźć rozkład stacjonarny.
- Znaleźć łańcuch skoków procesu X .