Procesy stochastyczne — zadania przygotowujące do I kolokwium (część I)

Zadanie 1 Rozwiąż równanie różnicowe:
a) $a_{k+2} - 6a_{k+1} + 9a_k = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$;
b) $a_{k+2} - 4a_{k+1} + 4a_k = 2^k$;
c) $a_{k+1} - 2a_k = k^2 2^k$, $a_1 = 0$;
d) $a_{k+2} - 4a_k = k^2 - 1$.

Zadanie 2 Znajdź średni czas trwania błądzenia losowego z barierą pochłaniającą dla $S_n = N$ i barierą odbijającą dla $S_n = 0$.

Zadanie 3 Pokazać, że liczba dróg dodatnich z $S_0 = 0$ do $S_{2n} = 0$ jest równa $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Zadanie 4 Pokazać, że liczba dróg nieujemnych z $S_0 = 0$ do $S_{2n} = 0$ jest równa $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Zadanie 5 Gracz z kapitałem początkowym 40 złotych rzuca symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł to dostaje od krupiera 10 złotych, jeśli reszka to traci 10 złotych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w chwili 10 jego wygrana wyniesie 80 złotych i jednocześnie jego kapitał w chwilach od 1 do 10 ani razu nie spadnie poniżej 50 złotych.

Zadanie 6 Gracz z kapitałem poczatkowym 5 złotych rzuca symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł, to dostaje od krupiera 1 złoty, jeśli reszka, to traci 1 złoty. Gra kończy się w momencie bakructwa gracza. Oblicz prawdopodobieństwo, że w chwili $T = 8$ gracz będzie miał 4 złote.

Zadanie 7 Na płaszczyźnie siedzą dwie muchy. Pierwsza znajduje się w punkcie $(0, 0)$ a druga w $(0, 4)$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Muchy zaczynają niezależnie przemieszczać się w sposób losowy. Każda z nich przechodzi w kolejnych momentach czasu o 1 w górę lub 1 w dół z prawdopodobieństwami $\frac{1}{2}$. Jeśli odległość pomiedzy muchami jest równa 10 to muchy odlatują. Obliczyć prawdopodobieństwo, że muchy się spotkają.

Zadanie 8 Na płaszczyźnie siedzą dwie muchy. Pierwsza znajduje się w punkcie $(0, 0)$ a druga w $(0, 2)$, przy czym pierwsza współrzędna oznacza czas a druga położenie. Muchy zaczynają niezależnie przemieszczać się w sposób losowy. Każda z nich przechodzi w kolejnych momentach czasu o 1 w górę lub 1 w dół z prawdopodobieństwami $\frac{1}{2}$. Eksperyment kończy się w momencie gdy muchy się spotkają lub gdy odległość między nimi wynosi 6. Oblicz wartość oczekiwaną czasu trwania eksperymentu